МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«Харківський політехнічний інститут»

Конкін В.М., Конохов В.І., Шергін С.Ю., Кравцова Н.В.

РОЗРАХУНКИ БРУСА ПРИ ПРОСТИХ ВИДАХ ДЕФОРМУВАННЯ

Навчально-методичний посібник з курсу „Опір матеріалів”
для студентів машинобудівних спеціальностей
заочної форми навчання

Затверджено
редакційно-видавничою
радою університету,
протокол № 2 від 07.12.2011р.

Харків
НТУ «ХПІ»
2012

УДК 620.17
ББК 30.121
Р64

Рецензенти: *В.Г.Сукіасов*, канд-т техн. наук, доц., Національний технічний університет „Харківський політехнічний інститут”; *О.О.Чупринін*, канд-т техн. наук, доц., Харківська державна академія міського господарства

Авторський колектив: Конкін В.М., Конохов В.І., Шергін С.Ю., Кравцова Н.В.

Р64 **Розрахунки** бруса при простих видах деформування: н.-метод. посіб. з курсу „Опір матеріалів” для студентів машинобудівних спеціальностей заочної форми навчання/ Конкін В.М., Конохов В.І., Шергін С.Ю., Кравцова Н.В. – Харків: НТУ „ХПІ”, 2012 – 142 с.

ISBN

Посібник містить розрахунки прямолінійних стержнів на розтягання – стискання, прямий поперечний згин та кручення.

Призначено для студентів машинобудівних спеціальностей заочної форми навчання. Може бути корисним для викладачів, а також для аспірантів та наукових працівників.

Іл. 43. Табл. 7. Бібліогр.: 5 назв.

УДК 620.17
ББК 30.121

ISBN

Вступ

Сучасний етап науково-технічного розвитку потребує удосконалення методів розрахунків на міцність з метою впровадження нових технологій, підвищення надійності та довговічності машин, оскільки конкурентоспроможність продукції машинобудування на світовому ринку неможлива без різкого підвищення якості машин, що випускаються.

Навчально-методичний посібник є одним з серії навчально-методичної літератури, підготованої на кафедрі опору матеріалів НТУ „ХПІ” для студентів заочної форми навчання, зокрема, з курсу „Опір матеріалів та розрахунки на міцність у машинобудуванні”.

Посібник охоплює три важливих розділи загального курсу опору матеріалів, а саме, розрахунки на розтягання – стискання, згин, кручення і призначений для засвоєння студентами загальних положень теорії простих видів деформування, ознайомлення з наведеними прикладами.

У першому розділі посібника розглянуто теорію та приклади розрахунків на центральний розтягання – стискання стержнів. У другому розділі розглянуто згинання прямолінійних стержнів, наведено визначення внутрішніх силових факторів при прямому поперечному згинанні, визначення нормальних напружень при чистому згинанні, дотичних напружень при поперечному згинанні балок, наведено розрахунки на міцність з урахуванням нормальних і дотичних напружень. У третьому розділі розглянуто кручення валів круглого та прямокутного поперечного перерізів. У кожному розділі надаються розрахункові схеми та числові дані для виконання індивідуальних розрахунково-проектувальних завдань, а також приклади їх розв’язання та оформлення.

1. РОЗТЯГАННЯ – СТИСКАННЯ

При розрахунках на міцність, жорсткість та стійкість багатьох елементів машинобудівних конструкцій зустрічається такий вид простого деформування, як розтягання − стискання стержнів.

1.1. Центральне розтягання та стискання прямолінійних стержнів

1.1.1. Внутрішня поздовжня сила

Центральне розтягання – стискання у брусі виникає в тому випадку, коли зовнішні навантаження діють по його осі (осьові зовнішні сили), чи приводяться до осьових сил. У цьому випадку у перерізі виникає єдиний внутрішній силовий фактор – внутрішня поздовжня сила. Брус, що знаходиться під дією розтягання – стискання, називається стержнем.

Проаналізуємо розподіл внутрішньої поздовжньої сили. Графічне представлення розподілу поздовжньої сили N по довжині стержня називається епюрою поздовжньої сили N. Розглянемо стержень, навантажений двома осьовими силами F_1 і F_2 (рис. 1.1).

Використовуючи метод перерізів, визначимо значення поздовжньої сили на першій та другій ділянках стержня відповідно у перерізах z_1 і z_2 – $N(z_1)$, $N(z_2)$. Відкидаючи праві частини стержня у кожному випадку та замінивши дію відкинутої частини на залишену поздовжніми силами $N(z_1)$ і $N(z_2)$, записуємо рівняння рівноваги для кожної ділянки $\sum F_{iz} = 0$. Одержуємо наступні рівняння для визначення поздовжньої сили на кожній ділянці стержня:

- для першої ділянки (перерізи його потрапляють у діапазон $0 \le z_1 \le \ell_1$)

$$-F_1 + N(z_1) = 0,$$

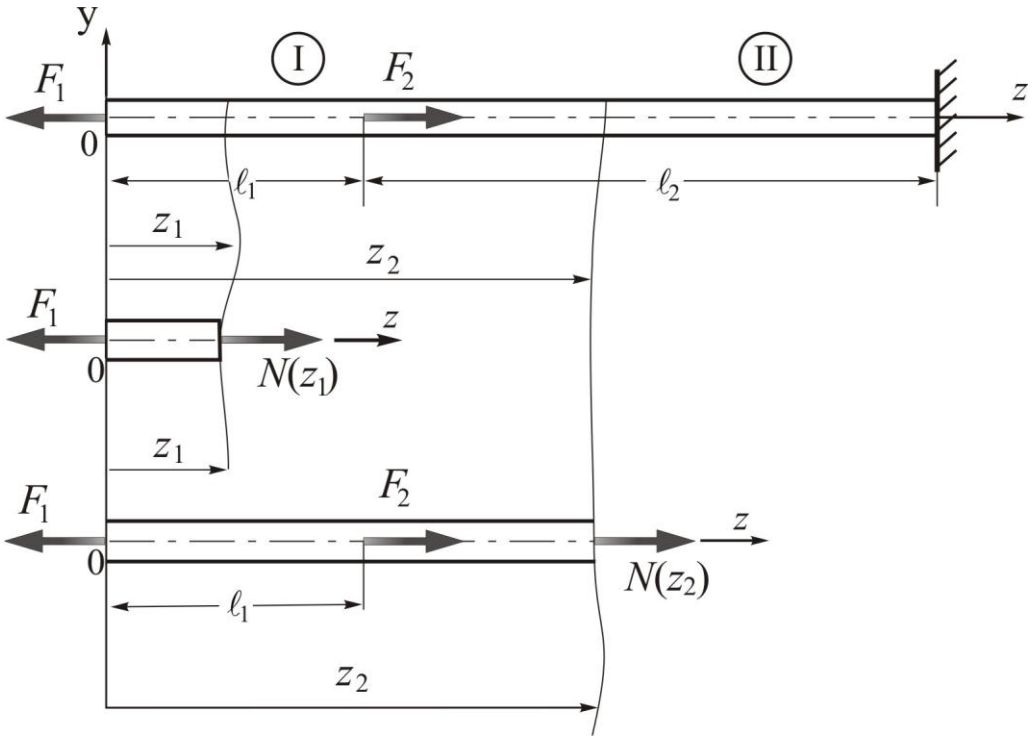


Рисунок 1.1

– для другої ділянки ($\ell_1 \le z_2 \le (\ell_1 + \ell_2)$)

$$-F_1 + F_2 + N(z_2) = 0.$$

Звідси значення поздовжніх сил на кожній ділянці:

$$N(z_1) = F_1, \quad N(z_2) = F_1 - F_2.$$

Узагальнюючи наведене вище, можна сформулювати правило для визначення поздовжньої сили у перерізі з поточною координатою z.

Поздовжня сила $N(z)$ в довільному перерізі чисельно дорівнює алгебраїчній сумі проекцій на вісь стержня (вісь Z) зовнішніх сил, які розташовані по один бік від перерізу (всіх однобічних сил).

Правило знаків*:* поздовжня сила приймається позитивною (додатною), якщо викликає деформацію розтягання, і негативною (від'ємною), якщо викликає деформацію стискання.

1.1.2. Побудова епюри внутрішньої поздовжньої сили

Порядок побудови епюри внутрішньої поздовжньої сили покажемо на прикладі стержня, наведеного на рис. 1.2.

1. Визначаємо значення опорної реакції H з умови статичної рівноваги системи зовнішніх сил $\sum F_{iz} = 0$:

$$\sum F_{iz} = -H + q\cdot(b+c) + F_2 - F_1 = 0,$$

звідси $H = 30\cdot 1{,}1 + 20 - 10 = 43$ кН.

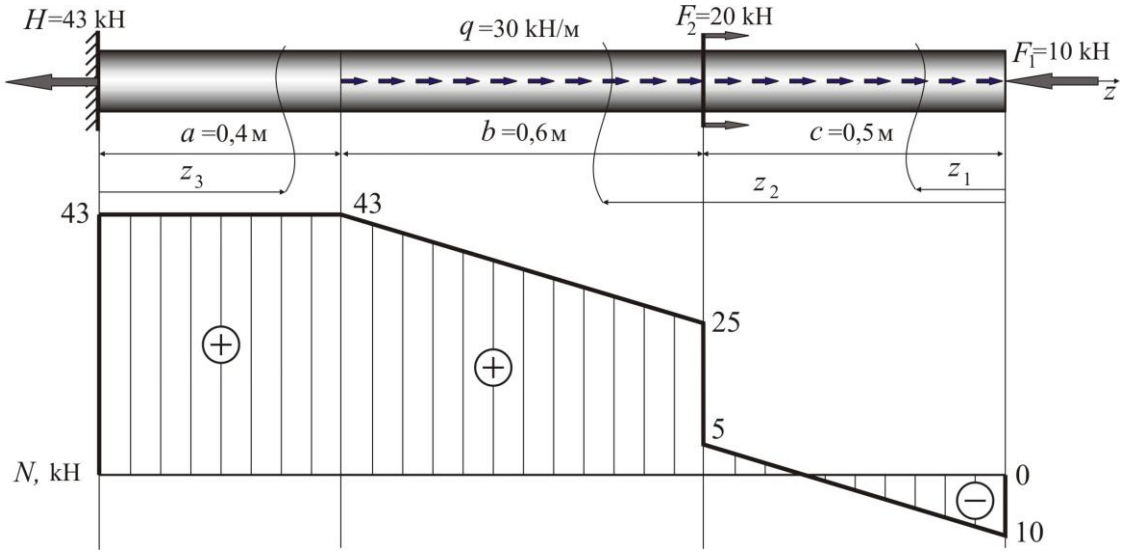


Рисунок 1.2

2. Розбиваємо стержень на ділянки, границі яких збігаються з перерізами, де прикладені зосереджені сили (у даному випадку сили F_1 і F_2), а також з перерізами, де починаються і закінчуються розподілені навантаження.

3. Записуємо вирази для поздовжньої сили у поточному перерізі, що визначається координатою z_i на кожній ділянці з урахуванням прийнятого правила знаків та визначаємо її значення:

$0 \le z_1 \le c$; $N(z_1) = -F_1 + qz_1$; $N(0) = -10$ кН;

– лінійна функція $N(0{,}5) = 5$ кН.

$c \le z_2 \le c+b$; $N(z_2) = -F_1 + F_2 + qz_2$; $N(0{,}5) = 25$ кН;

– лінійна функція $N(1{,}1) = 43$ кН.

$0 \le z_3 \le a$; $N(z_3) = H$ – const $N(0) = N(0{,}4) = 43$ кН.

За отриманими даними у масштабі будуємо епюру внутрішніх поздовжніх сил $N(z)$.

4. Перевірка правильності побудови епюр.

а) На ділянці з рівномірно розподіленим навантаженням q епюра $N(z)$ є лінійною (описується рівнянням прямої лінії, нахиленої до нульо-

вої), якщо $q = 0$, то $N(z) = \text{const}$. У нашому випадку на першій і другій ділянках $N(z)$ є лінійною, на третьому – постійна.

б) У перерізах, де прикладені зосереджені сили (F_1 і F_2 та реакція H), на епюрі $N(z)$ спостерігаються стрибки на величини цих сил.

1.1.3. Напруження при центральному розтяганні – стисканні

Розглянемо розтягання прямолінійного стержня довільного поперечного перерізу під дією двох рівних по величині та протилежно спрямованих сил (рис. 1.3 а). У довільному місці стержня уявно проведемо поперечний переріз, відкинемо праву частину, дію відкинутої частини на ту, що залишилася, замінимо внутрішнім зусиллям $N(z)$, що з рівняння статичної рівноваги $\sum F_{iz} = 0$ визначиться як $N(z) = F$ (рис. 1.3 б). Поздовжня сила $N(z)$ є рівнодіючою (результуючою) внутрішніх зусиль, які довільним образом розподілені по точках перерізу A, та нормальні до нього. Тобто при центральному розтяганні - стисканні у поперечному перерізі виникає тільки нормальне напруження σ (рис. 1.3 в).

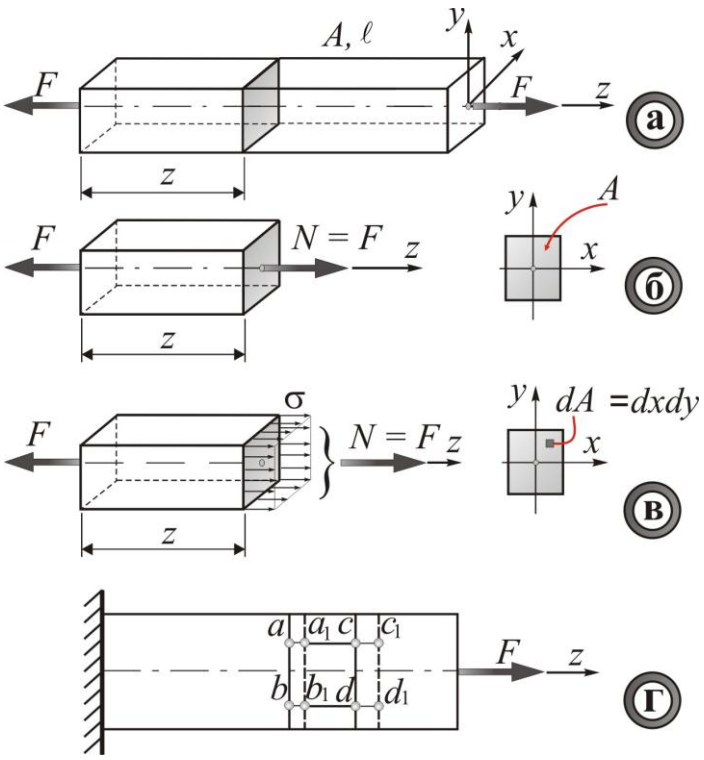


Рисунок 1.3

Очевидно, що на елементарну площадку dA діє елементарна поздовжня сила $dN = \sigma \cdot dA$**.** Звідси одержуємо рівняння в інтегральному вигляді:

$$N = \int_A \sigma \cdot dA. \qquad (1.1)$$

Вирішити це рівняння неможливо, тому що невідомий закон розподілу по перерізу напруження σ.

Щоб описати закон розподілу напружень σ по поперечному перерізу, звернемося до досліду. Як показують експерименти, при центральному розтяганні – стисканні однакові подовжні відрізки ac і bd стержня одержують однакові подовження (рис. 1.3 г): $(a_1c_1 - ac) = (b_1d_1 - bd)$. Лінії на бічній поверхні стержня, що являють собою сліди поперечних перерізів, рівнобіжні до деформування, залишаються рівнобіжними й у процесі деформування: $ab \parallel a_1b_1$ і $cd \parallel c_1d_1$.

Це дозволяє вважати, що при центральному розтяганні – стисканні виконується **гіпотеза плоских перерізів**: *переріз плоский та нормальний до осі (поперечний переріз) до деформації залишається плоским та нормальним до осі в процесі деформації*, тобто переміщуючись, переріз залишається паралельним (рівнобіжним) самому собі. Якщо уявити модель стержня, що складається з окремих подовжніх волокон, то при розтяганні кожне волокно подовжується на одну і ту ж величину. Отже, у кожному подовжньому волокні діє однакове зусилля. Цей висновок дозволяє вважати, що при центральному розтяганні − стисканні нормальне напруження σ по поперечному перерізу розподіляється рівномірно, тобто $\sigma = \text{const}$.

Тоді з рівняння (1.1) маємо: $N = \sigma \int_A dA = \sigma \cdot A$, звідси **нормальне напруження для всіх точок перерізу при центральному розтяганні – стисканні буде однаковим**, і визначиться формулою

$$\sigma = \frac{N}{A}. \qquad (1.2)$$

У розглянутому випадку напруження σ залишаються **постійними як по перерізу, так і по довжині** (якщо повздовжня сила та площа поперечного перерізу постійні), тобто по всьому обсягу стержня. Такий напружений стан називається **однорідним**.

Максимальні розрахункові нормальні напруження, обчислені за формулою (1.2), повинні зіставлятися з гранично допустимими напруженнями для матеріалу стержня, що забезпечують безпечну експлуатацію. Ці напруження називаються **допустимими напруженнями** $[\sigma]$.

Сформулюємо умову міцності при центральному розтяганні – стисканні, яка повинна виконуватись в кожній точці поперечних перерізів даного стержня:

$$\sigma = \frac{N}{A} \le [\sigma]. \qquad (1.3)$$

Для матеріалів, що мають неоднакові характеристики при розтяганні та стисканні, умова міцності (1.3) набуває вигляд:

$$\sigma_{\text{роз}} = \frac{N_{\text{роз}}}{A} \le [\sigma_{\text{роз}}] \; ; \qquad (1.4)$$

$$\sigma_{\text{ст}} = \frac{N_{\text{ст}}}{A} \le [\sigma_{\text{ст}}] \; ,$$

де $\sigma_{\text{роз}}$ та $\sigma_{\text{ст}}$ – найбільші нормальні напруження при розтяганні та стисканні відповідно.

Переріз стержня, у якому виникає найбільше нормальне напруження, є **небезпечним**.

Напруження, що допускається (допустиме напруження) , визначається як небезпечне напруження для даного матеріалу $\sigma_{\text{н}}$, поділене на нормативний коефіцієнт запасу $n_{\text{н}}$, тобто $[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{н}}}{n_{\text{н}}}$. Для пластичних матеріалів за небезпечне напруження приймається границя текучості $\sigma_{\text{т}}$, а для крихких – тимчасовий опір $\sigma_{\text{в}}$.

1.1.4. Види розрахунків за допустимим напруженням

Покажемо основні види розрахунків, які виконуються з використанням умови міцності (1.3) (розрахунки за допустимим напруженням).

1.1.4.1. Перевірочний розрахунок

Основна мета перевірочного розрахунку полягає в зіставленні максимальних розрахункових та допустимого напруження. У цьому розрахун-

ку відомою вважається вся вхідна інформація про стержень, що включає три групи даних:

- про зовнішні сили: значення навантажень та координати точок на осі бруса, де прикладенні ці навантаження,
- про геометричні розміри стержня: площа поперечного перерізу – A,
- про механічні властивості матеріалу стержня: допустиме напруження – $[\sigma]$.

За формулою (1.2) обчислюємо максимальні напруження $\sigma_{\max}$ та порівнюємо з допустимим $[\sigma]$. Якщо $\sigma_{\max} \approx [\sigma]$ – міцність стержня забезпечена (допускається відхилення до 5% в бік перебільшення у значенні $\sigma_{\max}$ над $[\sigma]$). При $\sigma_{\max} << [\sigma]$ стержень вважається недовантаженим, що приводить до перевитрати матеріалу. У випадку, $\sigma_{\max} > [\sigma]$ – стержень перевантажений, що приводить до необхідності переглянути вихідну розрахункову схему чи вибрати інший матеріал.

1.1.4.2. Проектувальний розрахунок (підбор площі поперечного перерізу)

Мета цього розрахунку полягає у визначені безпечних з точки зору міцності розмірів перерізу стержня.

Відомими вважаються:

- зовнішні сили: значення навантажень і координати точок на осі бруса, де прикладенні ці навантаження,
- механічні властивості матеріалу стержня: допустиме напруження – $[\sigma]$.

Після побудови епюри внутрішніх поздовжніх сил, обирається переріз з максимальним значенням $N_{\max}$.

З умови міцності (1.3) площу небезпечного поперечного перерізу обчислюємо за формулою

$$A \geq \frac{N_{\max}}{[\sigma]}.$$

1.1.4.3. Визначення максимально допустимого зовнішнього навантаження

Мета цього розрахунку полягає у визначені безпечного з точки зору

міцності зовнішнього навантаження стержня. Розрахунок проводиться за допомогою умови міцності (1.3).

Відомими вважаються:

− геометричні розміри стержня: площа поперечного перерізу – A,

− механічні властивості матеріалу стержня: допустиме напруження – $[\sigma]$.

Будується епюра внутрішньої поздовжньої сили в загальному виді.

З умови міцності (1.3) визначається $N_{\max} \le [\sigma] \cdot A$, з якої далі знаходиться навантаження, що допускається.

1.1.5. Деформації та переміщення при розтяганні – стисканні. Закон Гука. Модуль пружності. Коефіцієнт Пуассона

Розглянемо розтягнутий силою F стержень довжиною ℓ_0 та площею поперечного перерізу A (рис. 1.4).

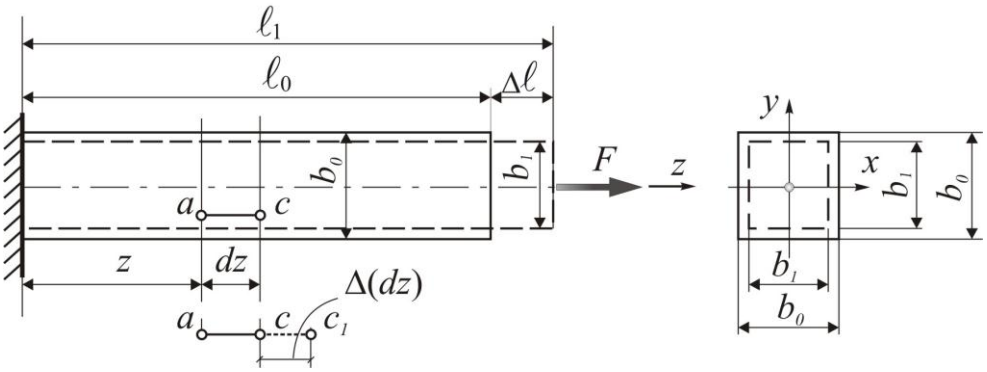


Рисунок 1.4

Під дією зовнішнього розтягувального навантаження поздовжній розмір стержня збільшується до ℓ_1. Зміна довжини $\Delta\ell = \ell_1 - \ell_0$ називається **абсолютним подовженням** стержня, або **абсолютною поздовжньою деформацією**.

Відношення

$$\frac{\Delta\ell}{\ell_0} = \varepsilon \tag{1.5}$$

називається **відносною поздовжньою деформацією** (чи просто **поздовжньою деформацією**). Якщо в стержні виникає неоднорідний напружений стан, деформація в точці a визначається шляхом граничного переходу до нескінченно малого елемента довжиною dz:

$$\varepsilon = \frac{\Delta dz}{dz}.$$

Відносна поздовжня деформація вважається додатною при розтяганні і від'ємною − при стисканні.

При цьому необхідно зазначити, що в лінійних пружних системах існує прямопропорційна залежність між напруженнями та деформаціями.

$$\sigma = E \cdot \varepsilon.$$

Це співвідношення називається **законом Гука при центральному розтяганні − стисканні (одновісному напруженому стані)**.

Коефіцієнт пропорційності E – **модуль пружності** (**поздовжньої пружності**) – фізична постійна матеріалу.

Орієнтовні величини модуля пружності для деяких матеріалів мають значення:

- сталь – E = (2...2,1)·10^5 МПа;
- мідь і сплави міді – E = (1...1,2)·10^5 МПа;
- алюміній і сплави алюмінію – E = (0,7...0,72)·10^5 МПа.

Враховуючи (1.2) та (1.5), залежність між навантаженням та подовженням при однорідному напруженому стані визначається співвідношенням

$$\Delta\ell = \frac{N\ell}{EA},$$

де EA – називається **жорсткістю** стержня при розтяганні.

Якщо N та A змінюються по довжині стержня, то абсолютне подовження стержня довжиною ℓ_0 визначається за формулою:

$$\Delta\ell = \int_0^{\ell_0} \frac{N(z)dz}{EA}.$$

Крім поздовжніх деформацій у стержні виникають і поперечні деформації. Різниця $\Delta b = b_1 - b_0$ (рис. 1.4) називається **абсолютною поперечною деформацією**. Відношення $\frac{\Delta b}{b_0} = \varepsilon'$ називається **відносною поперечною деформацією**. Відносна поперечна деформація має протилежний знак від відносної поздовжньої деформації. При цьому існує прямопропор-

ційна залежність між відносною поздовжньою та відносною поперечною деформаціями:

$$\varepsilon' = -\mu \cdot \varepsilon .$$

Абсолютна величина відношення відносної поперечної деформації до відносної поздовжньої називається **коефіцієнтом Пуассона** μ, тобто

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right| .$$

Значення коефіцієнта Пуассона для деяких матеріалів, що використовуються у машинобудуванні, знаходяться у діапазоні: $0 \le \mu \le 0{,}5$:

- для каучуку близько до 0,5;
- для сталі – μ = 0,25...0,3;
- для міді – μ = 0,31...0,35;
- для алюмінію – μ = 0,32...0,36.

Коефіцієнт Пуассона μ, також як і модуль поздовжньої пружності E, є фізичними константами матеріалу та характеризують його пружні властивості.

1.2. Статично невизначувані системи при розтяганні − стисканні

1.2.1. Основні поняття та визначення

У практиці розрахунків при розтяганні − стисканні зустрічаються розрахункові схеми, для яких при відомих активних зовнішніх зусиллях рівнянь статичної рівноваги недостатньо для визначення реактивних зусиль і внутрішніх зусиль. Такі системи прийнято називати статично невизначуваними.

Статично невизначуваною називається кінематично незмінна система, у якої число невідомих зусиль, включаючи реакції опор та внутрішні сили, більше числа рівнянь статики, які можна скласти для даної системи чи її частини.

Різниця між кількістю невідомих зусиль та кількістю незалежних рівнянь статичної рівноваги, що можна записати для всієї системи або її частини, називається ступенем статичної невизначеності системи.

Це число показує скільки додаткових рівнянь у геометричному аналізі процесу деформування системи необхідно скласти, щоб можна було

вирішити задачу. Розкриття статичної невизначуваності таких систем складається з чотирьох основних етапів.

Загальний план рішення таких задач полягає в наступному.

1. **Статична сторона задачі (ССЗ)**. Визначаємо напрямок реакцій зв'язків, внутрішніх зусиль у стержнях, складаємо рівняння рівноваги, визначаємо ступінь статичної невизначуваності задачі.

2. **Геометрична сторона задачі (ГСЗ).** Установлюємо зв'язок між переміщеннями окремих перерізів конструкції, виходячи з умови спільності переміщень. Складаємо необхідну кількість рівнянь зв’язку між переміщеннями. Число таких рівність повинно дорівнювати ступеню статичної невизначуваності системи. Отримані рівняння називаються **рівняннями спільності переміщень.**

3. **Фізична сторона задачі (ФСЗ).** У рівняннях спільності переміщень для окремих елементів їхні переміщення виражаємо на підставі закону Гука через діючі в них невідомі зусилля.

4. **Синтез.** Вирішуємо отриману систему рівнянь щодо невідомих зусиль.

Розглянемо розрахунки статично невизначуваних задач при центральному розтяганні – стисканні на прикладах.

1.2.2. Жорстко закріплений стержень під дією зосередженої сили

Жорстко закріплений обома кінцями стержень площею поперечного перерізу A навантажений силою F (рис. 1.5). Модуль пружності матеріалу E. Визначити опорні реакції та побудувати епюру поздовжніх сил.

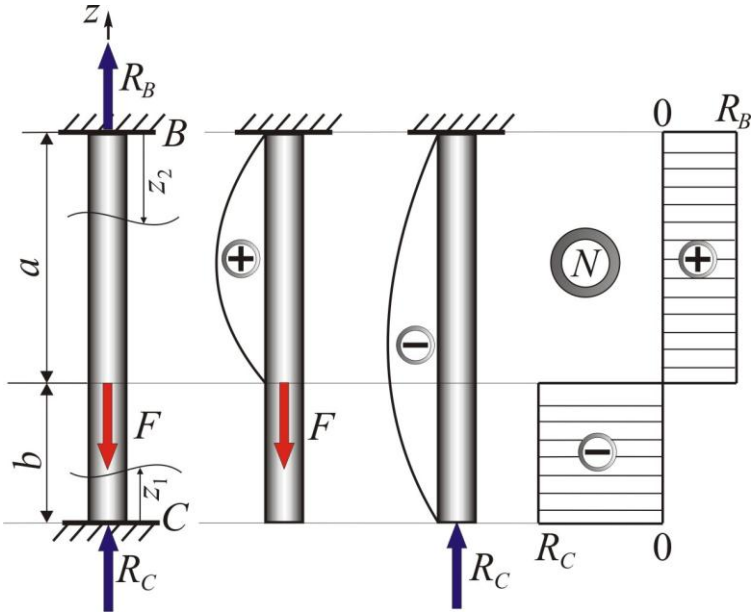


Рисунок 1.5

1. **ССЗ.** Показуємо опорні реакції R_C і R_B. Записуємо єдину умову рівноваги, яку можна скласти для даної задачі

$$\sum F_{zi} = R_C + R_B - F = 0. \qquad (1.6)$$

Це рівняння має дві невідомі, тому ступінь статичної невизначеності дорівнює: $n = 2 - 1 = 1.$

2. **ГСЗ.** Так як опори жорсткі, то повне подовження стержня дорівнює нулю, тобто $\Delta\ell = 0$. Один з підходів реалізації цієї умови такий. Відкидаємо одну з опор та послідовно прикладаємо зовнішні сили і невідому реакцію у відкинутій опорі. Повне подовження стержня зобразиться як сума подовжень від зовнішнього навантаження F – $(\Delta\ell_F)$ і реакції $R_C - (\Delta\ell_{R_C})$:

$$\Delta\ell = \Delta\ell_F + \Delta\ell_{R_C} = 0.$$

3. **ФСЗ**. Подовження від зовнішнього зусилля у розглянутому випадку складає: $\Delta\ell_F = \dfrac{Fa}{EA}$, укорочення від реакції: $\Delta\ell_{R_C} = -\dfrac{R_C(a+b)}{EA}$.

4. **Синтез**. Повна деформація стержня виявляється рівною:

$$\Delta\ell = \frac{Fa}{EA} - \frac{R_C(a+b)}{EA} = 0. \qquad (1.7)$$

З рівняння (1.7) одержуємо $R_C = F\dfrac{a}{a+b}$, а з рівняння (1.6) випливає: $R_B = F - R_C = F\dfrac{b}{a+b}$. Розбиваємо стержень на дві ділянки та записуємо значення поздовжньої сили на кожній ділянці:

1ª ділянка: $0 \le z_1 \le b$: $N(z_1) = -R_C = -F\dfrac{a}{a+b}$;

2ª ділянка: $0 \le z_2 \le a$: $N(z_2) = R_B = F\dfrac{b}{a+b}$.

По отриманим рівнянням будуємо епюру поздовжніх сил.

1.2.3. Жорстко закріплений стержень під дією температурного навантаження

Особливий інтерес викликають задачі розрахунків статично невизначуваних систем при термосиловому навантаженні. У статично невизначу-

ваних стержнях і стержньових системах навіть невеликі перепади температур приводять до появи помітних величин напружень.

Доповнимо вище розглянутий приклад розрахунком температурних напружень. Будемо вважати, що стержень нагрітий на Δt °С (рис.1.6).

1. **ССЗ.** Показуємо опорні реакції R_C^t і R_B^t . Записуємо єдину умову рівноваги, яку можна скласти для даної задачі

$$\sum F_{zi} = R_C^t - R_B^t = 0; \quad R_C^t = R_B^t = R_t$$

Реакції R_C^t і R_B^t , що виникають у защемленнях, рівні між собою та спрямовані в протилежні сторони.

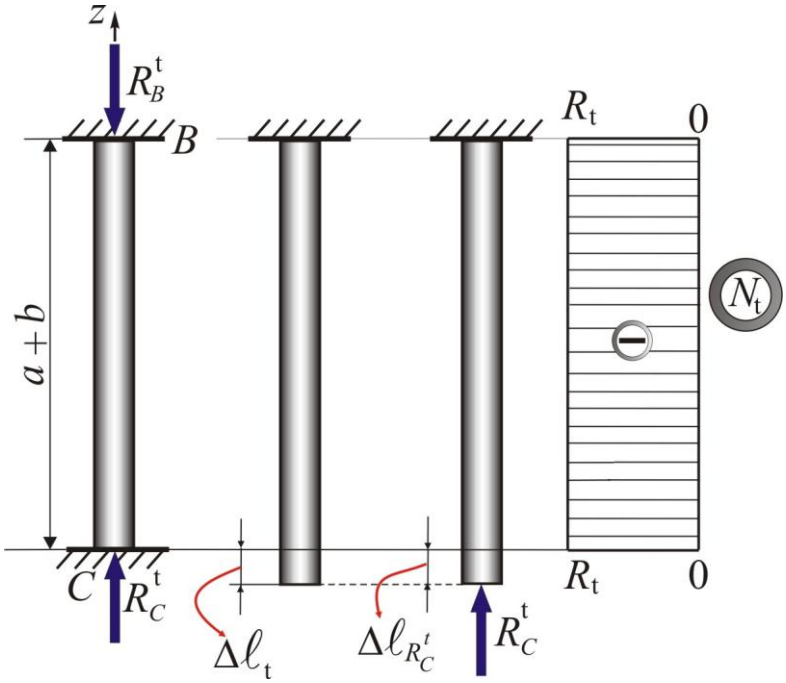


Рисунок 1.6

2. **ГСЗ.** Повне подовження стержня складеться з суми подовжень вільного температурного розширення стержня та укорочення від реакції $R_C^t = R_t$ (див. рис. 1.6), тобто

$$\Delta\ell_t + \Delta\ell_{R_t} = 0,$$

3. **ФСЗ.** Укорочення від реакції, як і в попередньому прикладі, дорівнює: $\Delta\ell_{R_C} = -\dfrac{R_C^t\,(a+b)}{EA}$, а температурне розширення стержня

$\Delta\ell_t = \alpha_t(a+b)\Delta t$ (α_t – температурний коефіцієнт лінійного розширення).

4. **Синтез.** З рішення системи рівнянь одержуємо реакції опор

$$R_C^t = R_B^t = R_t = \frac{\Delta\ell_t EA}{a+b} = \alpha_t EA\Delta t$$

та значення поздовжньої сили, яке на всіх ділянках стержня є постійним:

$$N_t(z_1) = N_t(z_2) = -R_t = -\alpha_t EA\Delta t.$$

Температурні напруження у перерізі стержня $\sigma_t = \dfrac{N_t}{A} = -\alpha_t E\Delta t$

і не залежать від площі поперечного перерізу.

При охолодженні стержня план рішення не змінюється, а результат задачі відрізняється тільки знаком (стержень розтягується).

1.2.4. Урахування недосконалості виготовлення (монтажний фактор)

Аналогічно температурній розглядається задача визначення монтажних напружень, які викликані наявністю недосконалості виготовлення стержня. Стержень виготовлено більше номінального розміру на величину δ (рис. 1.7). При монтуванні його стискають та закріплюють в опорах, де виникають реакції R_C^δ і R_B^δ .

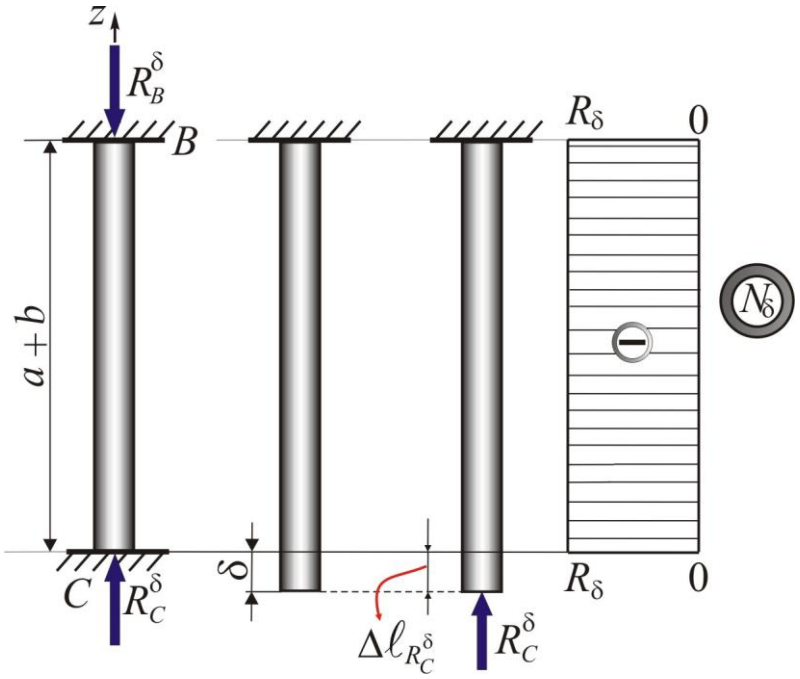


Рисунок 1.7

1.**ССЗ.** Записуємо єдину умову рівноваги, яку можна скласти для даної задачі

$$\sum F_{zi} = R_C^{\delta} - R_B^{\delta} = 0; \quad R_C^{\delta} = R_B^{\delta} = R_{\delta}$$

Реакції R_C^{δ} і R_B^{δ} , що виникають у защемленнях, рівні між собою та спрямовані в протилежні сторони.

2.**ГСЗ.** Повне подовження стержня складеться з суми подовжень: недосконалості δ та укорочення від реакції $R_C^{\delta} = R_{\delta}$ (див. рис.1.7), тобто

$$\delta + \Delta\ell_{R_{\delta}} = 0.$$

3. **ФСЗ.** Укорочення від реакції, як і в попередньому прикладі, дорівнює:

$$\Delta\ell_{R_C} = -\frac{R_C(a+b)}{EA},$$

4. **Синтез.** З рішення системи рівнянь одержуємо реакції опор

$$R_C^{\delta} = R_B^{\delta} = R_{\delta} = \frac{\delta\, E\, A}{a+b}$$

та значення поздовжньої сили, яке на всіх ділянках стержня є постійним:

$$N_{\delta}(z_1) = N_{\delta}(z_2) = -R_{\delta}.$$

У цьому випадку монтажні напруження у перерізі стержня $\sigma_{\delta} = \dfrac{N_{\delta}}{A} = -\dfrac{\delta \cdot E}{a+b}$ і не залежать від площі поперечного перерізу.

Якщо стержень виготовлено менше номінального розміру, то при монтуванні його розтягують. План рішення задачі не змінюється, а результат відрізняється тільки знаком (стержень розтягається).

1.3. Розрахунково-проектувальне завдання

При вивчені розділу „Розтягання − стискання” в курсі “Опір матеріалів” ставиться мета навчити студентів основам інженерного розрахунку елементів конструкцій машин і механізмів на міцність і жорсткість при навантаженні, що діє вздовж осі стержня (поздовжньої сили), з урахуванням

при цьому умов роботи, властивостей матеріалів та різноманітних типів поперечних перерізів.

Для кращої організації і більш ефективної самостійної роботи студентів, згідно з вимогами програми курсу “Опір матеріалів”, студентам пропонується до виконання розрахунково-проектувальне завдання (РПЗ) по темі “Розрахунки на міцність при центральному розтяганні − стисканні”. Виконуючи цю роботу, студент практично знайомиться з методами обчислення внутрішніх поздовжніх сил, побудови епюр цих сил, розрахунку нормальних напружень та переміщень, визначення розмірів поперечного перерізу для різноманітних схем, що забезпечують умови міцності.

1.3.1. Склад розрахунково-проектувального завдання

Розрахунково-проектувальне завдання складається з трьох етапів:

1. Рішення запропонованих викладачем задач для певних варіантів розрахункових схем і вихідних даних, оформлення їх за вимогами кафедри „Опору матеріалів”.
2. Написання контрольних робіт за темою РПЗ.
3. Захист РПЗ. Захист включає в себе пояснення методів і принципів розв'язання задач і відповідь на контрольні теоретичні запитання. Кількість та об’єм цих запитань визначається викладачем індивідуально для кожного студента.

Мета завдання – проведення перевірочних, проектувальних розрахунків для визначення розмірів поперечного перерізу та грузонавантаження конструкції с заданим коефіцієнтом запасу.

Дано:

1. Розрахункова схема заданої системи з вказаними довжинами дільниць і видом зовнішнього навантаження.
2. Чисельні дані.
3. Механічні характеристики деяких марок сталі – таблиця Д1.4.

РПЗ складається з трьох обов’язкових для рішення задач:

1. **Перевірочний розрахунок.** Для заданої схеми навантаження стержня ступінчатої зміни площі поперечного перерізу побудувати епюри внутрішніх поздовжніх сил, нормальних напружень, переміщень та перевірити міцність стержня.

Варіанти розрахункових схем наведені в додатку 1.1, а чисельні дані – в таблиці Д1.1 та Д1.4.

2. **Визначення максимально допустимого навантаження.** Для заданої схеми стержньової системи визначити з умови міцності допустиме значення зовнішньої сили F.

Варіанти розрахункових схем наведені в додатку 1.2, а чисельні дані – в таблиці Д1.2 та Д1.4.

3. **Проектувальний розрахунок.** Для заданої статично невизначуваної системи з послідовним розташуванням ділянок стержня з розрахунку на міцність визначити площу поперечних перерізів на всіх ділянках стержня і побудувати епюру поздовжніх сил та нормальних напружень. Для цієї ж розрахункової схеми провести розрахунки для визначення впливу температурного навантаження та недосконалості виготовлення на напружений стан. Перевірити міцність конструкції від дії зовнішнього навантаження, температури та недосконалості виготовлення.

Варіанти розрахункових схем наведені в додатку 1.3, а чисельні дані – в таблиці Д1.3 та Д1.4.

1.3.2. Порядок виконання завдання

Задача 1. *Для статично визначуваного стержня з послідовно розташованими ділянками різної площі поперечного перерізу, навантаженого зосередженими поздовжніми силами та розподільним навантаженням побудувати епюри внутрішніх поздовжніх сил, нормальних напружень, переміщень, перевірити міцність.*

1. Виписати для заданого варіанту чисельні дані. В певному масштабі накреслити схему заданої системи з зазначенням її лінійних розмірів і зовнішніх навантажень.

2. Визначити значення внутрішньої поздовжньої сили в перерізах на ділянках стержня та побудувати для заданої схеми епюру внутрішніх поздовжніх сил.

3. Обчислити нормальні напруження на різних ділянках стержня, побудувати епюру нормальних напружень та перевірити виконання умови міцності.

4. Побудувати епюру поздовжніх переміщень перерізів стержня.

Задача 2. *Для заданої статично визначуваної стержньової системи визначити допустиме навантаження (значення зосередженої зовнішньої сили F).*

1. Виписати для заданого варіанту чисельні дані. В певному масштабі накреслити схему заданої системи з зазначенням її лінійних розмірів і зовнішнього навантаження.

2. Визначити значення поздовжніх сил в певних перерізах стержнів в долях зовнішньої сили $\boldsymbol{F}$. З умови міцності для кожного з стержнів визначити значення допустимого навантаження $\boldsymbol{F}$ для всієї системи.

3. Обчислити нормальні напруження в стержнях.

Задача 3. *Для статично невизначуваного стержня при центральному розтяганні – стисканні з умови міцності визначити параметр A площі поперечного перерізу. Провести розрахунки з урахуванням додаткового фактора (зміни температури та недосконалості виготовлення).*

1. Для заданого варіанту завдання виписати чисельні дані і в певному масштабі накреслити схему заданої системи з зазначенням лінійних розмірів і зовнішніх навантажень.

2. Встановити ступінь статичної невизначуваності системи.

3. **Статичний аспект задачі.** Скласти і записати рівняння статики. Вибрати основну статично визначувану систему, уявно відкинувши одну з опор і замінивши її реакцією опори.

4. **Геометричний аспект задачі.** Розглянути сумісне деформування основної системи. Записати рівняння сумісності переміщень. Сумарне переміщення на відкинутій опорі від дії зовнішніх сил та реактивного зусилля повинно дорівнювати нулю.

5. **Фізичний аспект задачі.** Використати закон Гука для запису виразів для переміщень як абсолютних деформацій стержня.

6. **Сумісне рішення отриманих рівнянь.** Визначити значення реактивних зусиль в опорах.

7. Побудувати епюру поздовжніх сил.

8. З умови міцності для максимально напружених ділянок визначити параметр A площі поперечного перерізу .

9. Побудувати епюри нормальних напружень для усіх ділянок схеми.

10. Побудувати епюру переміщень і зробити деформаційну перевірку.

11. Для наданої розрахункової схеми провести розрахунок статично невизначуваного стержня з урахуванням зміни температури. Побудувати епюри внутрішніх поздовжніх сил та нормальних напружень від дії цього додаткового фактора.

12. Для наданої розрахункової схеми провести розрахунок статично невизначуваного стержня з урахуванням недосконалості виготовлення конструкції. Побудувати епюри внутрішніх поздовжніх сил та нормальних напружень від дії цього додаткового фактора.

13. Визначити сумарні напруження від дії зовнішнього навантаження, дії температури та недосконалості виготовлення, побудувати епюру цих напружень та перевірити міцність стержня.

1.3.3. Приклади розв'язання задач

Зразок виконання задачі 1

Дано:

$$A = 0{,}5 \cdot 10^{-2}\ \text{м}^2; \quad E = 2 \cdot 10^5\ \text{МПа}; \quad \sigma_{\text{т}} = 240\ \text{МПа}; \quad n_{\text{т}} = 1{,}6;$$

$$F_1 = 400\ \text{кН}; \quad F_2 = 200\ \text{кН}; \quad q = 500\ \frac{\text{кН}}{\text{м}};$$

$$\ell_1 = 0{,}2\ \text{м}; \quad \ell_2 = 0{,}4\ \text{м}; \quad \ell_3 = 0{,}5\ \text{м}.$$

Допустиме напруження: $[\sigma] = \dfrac{\sigma_{\text{т}}}{n_{\text{т}}} = 150\ \text{МПа}.$

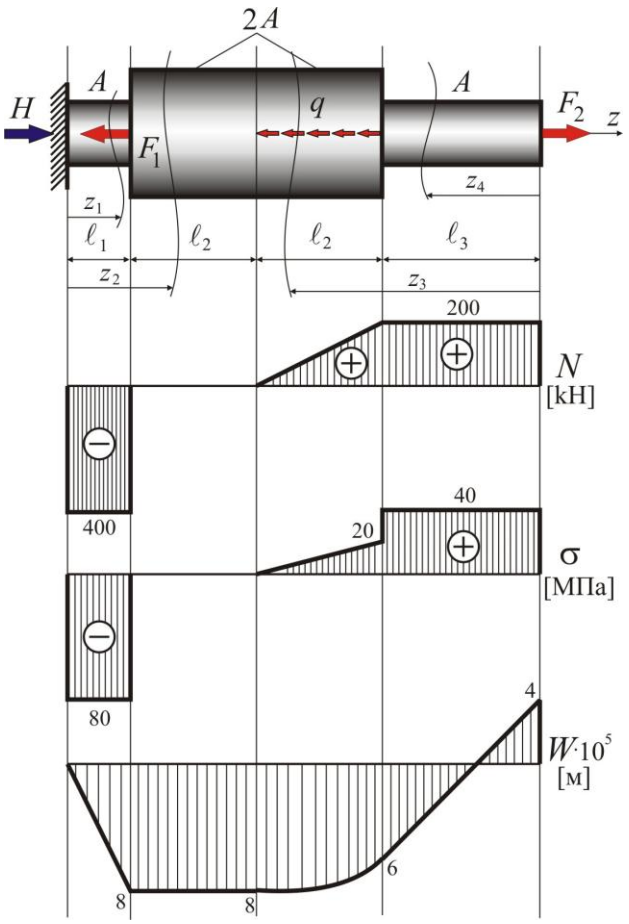
Необхідно:

1. Визначити внутрішні зусилля на ділянках стержня та побудувати епюру внутрішніх поздовжніх сил N.
2. Визначити нормальні напруження на ділянках стержня та побудувати епюру напружень σ. Перевірити міцність стержня.
3. Визначити абсолютні деформації ділянок стержня та побудувати епюру поздовжніх переміщень поперечних перерізів W.

Рішення:

1. Визначення реакції H.

$$\sum F_z = 0; \; H - F_1 - q\ell_2 + F_2 = 0; \;\; H = F_1 + q\ell_2 - F_2 = 400\,\text{кН}.$$



2. Побудова епюри внутрішніх зусиль N.

$0 \le z_1 \le \ell_1$

$N_1(z_1) = -H = -400$ кН.

$\ell_1 \le z_2 \le \ell_1 + \ell_2$

$N_2(z_2) = -H + F_1 = 0.$

$\ell_3 \le z_3 \le \ell_3 + \ell_2$

$N_3(z_3) = F_2 - q(z_3 - \ell_3),$

$N_3(\ell_3) = F_2 = 200$ кН;

$N_3(\ell_3 + \ell_2) = F_2 - q\ell_2 = 0.$

$0 \le z_4 \le \ell_3$

$N_4(z_4) = F_2 = 200$ кН.

3. Визначення нормальних напружень на ділянках стержня та побудова епюри σ.

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = -\frac{400 \cdot 10^3}{0{,}5 \cdot 10^{-2}} = -80 \cdot 10^6 \text{ Па} = -80 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = 0;$$

$$\sigma_3(\ell_3) = \frac{N_3(\ell_3)}{A_3} = \frac{200 \cdot 10^3}{2 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-2}} = 20 \cdot 10^6 \text{ Па} = 20 \text{ МПа};$$

$$\sigma_3(\ell_3 + \ell_2) = \frac{N_3(\ell_3 + \ell_2)}{A_3} = 0;$$

$$\sigma_4 = \frac{N_4}{A_4} = \frac{200 \cdot 10^3}{0{,}5 \cdot 10^{-2}} = 40 \cdot 10^6 \text{ Па} = 40 \text{ МПа}.$$

Максимальне по абсолютному значенню нормальне напруження досягається на першій ділянці.

$\sigma_{\max} = |\sigma_1| = 80$ МПа $\le [\sigma] = 150$ МПа − умова міцності виконується.

4. Визначення абсолютних деформацій ділянок стержня та побудова епюри переміщень W.

$$\Delta\ell_1 = \frac{N_1 \cdot \ell_1}{EA_1} = -\frac{400 \cdot 10^3 \cdot 0{,}2}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-2}} = -8 \cdot 10^{-5} \text{ м};$$

$$\Delta\ell_2 = \frac{N_2 \cdot \ell_2}{EA_2} = 0;$$

$$\Delta\ell_3 = \int_{\ell_3}^{\ell_2+\ell_3} \frac{N_3(z_3)dz}{EA_3} = \int_{\ell_3}^{\ell_2+\ell_3} \frac{[F_2 - q(z_3 - \ell_3)]dz}{EA_3} =$$

$$= \frac{1}{EA_3}\left[\int_{\ell_3}^{\ell_2+\ell_3} F_2 dz - \int_{\ell_3}^{\ell_2+\ell_3} q(z_3 - \ell_3)dz\right] =$$

$$= \frac{1}{EA_3}\left[F_2 z_3\Big|_{\ell_3}^{\ell_2+\ell_3} - q\frac{(z_3-\ell_3)^2}{2}\Bigg|_{\ell_3}^{\ell_2+\ell_3}\right] = \frac{1}{EA_3}\left[F_2\ell_2 - q\frac{\ell_2^2}{2}\right] =$$

$$= \frac{1}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-2}}\left[200 \cdot 10^3 \cdot 0{,}4 - 500 \cdot 10^3 \frac{0{,}4^2}{2}\right] = 2 \cdot 10^{-5} \text{ м};$$

$$\Delta\ell_4 = \frac{N_4 \cdot \ell_3}{EA_4} = \frac{200 \cdot 10^3 \cdot 0{,}5}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-2}} = 10 \cdot 10^{-5} \text{ м};$$

$$W_1 = \Delta\ell_1 = -8 \cdot 10^{-5} \text{ м};$$

$$W_2 = W_1 + \Delta\ell_2 = \Delta\ell_1 + \Delta\ell_2 = (-8+0) \cdot 10^{-5} = -8 \cdot 10^{-5} \text{ м};$$

$$W_3 = W_2 + \Delta\ell_3 = \Delta\ell_1 + \Delta\ell_2 + \Delta\ell_3 = (-8+0+2) \cdot 10^{-5} = -6 \cdot 10^{-5} \text{ м};$$

$$W_4 = W_3 + \Delta\ell_4 = \Delta\ell_1 + \Delta\ell_2 + \Delta\ell_3 + \Delta\ell_4 =$$

$$= (-8+0+2+10) \cdot 10^{-5} = 4 \cdot 10^{-5} \text{ м}.$$

Зразок виконання задачі 2

Дано:

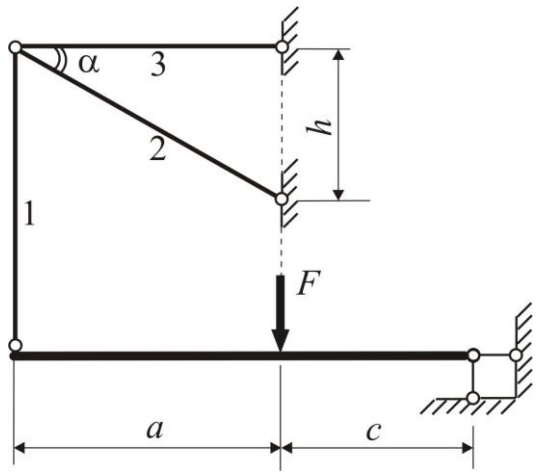
$a = 2{,}0$ м; $c = 1{,}5$ м; $h = 2{,}5$ м. $\sigma_т = 240$ МПа; $n_т = 1{,}2$.

Допустиме напруження: $[\sigma] = \dfrac{\sigma_{\text{т}}}{n_{\text{т}}} = 200$ МПа.

Необхідно:

1. Виразити значення внутрішніх зусиль в стержнях системи через параметр навантаження F.
2. З умови міцності стержнів визначити допустиме навантаження.
3. Визначити напруження в стержнях системи.

Рішення:



Переріз 1: I N 10
Переріз 2: d=4 см.
Переріз 3: ⌶ ∟ N 6,3/4

1. Визначаємо геометричні параметри конструкції: площі поперечних перерізів стержнів та довжину стержня **2**:

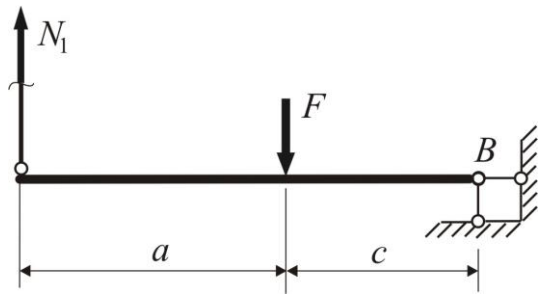
$$A_1 = 12{,}0 \text{ см}^2;\ A_2 = d^2 = 16{,}0 \text{ см}^2;$$

$$A_3 = 4 \cdot 4{,}96 \approx 19{,}8 \text{ см}^2;$$

$$\ell_2 = \sqrt{a^2 + h^2} = 3{,}2 \text{ м}.$$

2. Знаходимо внутрішні зусилля в стержнях.

Для цього розрізаємо стержень **1** та окремо розглядаємо рівновагу верхньої та нижньої частин конструкції. Для нижньої частини визначаємо залежність внутрішньої поздовжньої сили N_1 від зовнішньої сили F.

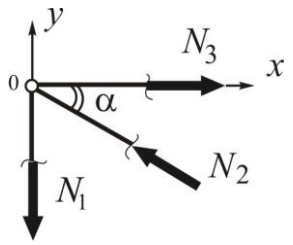


Запишемо рівняння статичної рівноваги:

$\sum M_B = 0$, або

$$N_1(a + c) - Fc = 0; \quad N_1 = \frac{Fc}{a + c} = 0{,}43F.$$

Для верхньої частини знаходимо залежність внутрішніх поздовжніх сил N_2 та N_3 через N_1, а згодом, через силу F. Запишемо рівняння статичної рівноваги:



$$\sum F_{iY} = 0;\ -N_1 + N_2 \sin\alpha = 0;\ N_2 = \frac{N_1}{\sin\alpha} = 0{,}55F.$$

$$\sum F_{iX} = 0;\quad N_3 - N_2\cos\alpha = 0;\quad N_3 = 0{,}34F\text{, де}$$

$$\sin\alpha = \frac{h}{\ell_2} = 0{,}781;\quad \cos\alpha = \frac{a}{\ell_2} = 0{,}625.$$

4. Визначаємо чисельне значення параметра навантаження F з умови міцності кожного стержня:

для першого:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{0{,}43F_{[1]}}{A_1} \le [\sigma];$$

$$F_{[1]} \le \frac{[\sigma]\cdot A_1}{0{,}43} = \frac{200\cdot 10^6\cdot 12{,}0\cdot 10^{-4}}{0{,}43} \approx 558{,}1\cdot 10^3\ \text{Н} = 558{,}1\ \text{кН}.$$

для другого стержня:

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{0{,}55F_{[2]}}{A_2} \le [\sigma];$$

$$F_{[2]} \le \frac{[\sigma]\cdot A_2}{0{,}55} = \frac{200\cdot 10^6\cdot 16{,}0\cdot 10^{-4}}{0{,}55} \approx 581{,}8\cdot 10^3\ \text{Н} = 581{,}8\ \text{кН}.$$

для третього стержня

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_3} = \frac{0{,}34F_{[3]}}{A_3} \le [\sigma];$$

$$F_{[3]} \le \frac{[\sigma]\cdot A_3}{0{,}34} = \frac{200\cdot 10^6\cdot 19{,}8\cdot 10^{-4}}{0{,}34} \approx 1747{,}1\cdot 10^3\ \text{Н} = 1747{,}1\ \text{кН}.$$

Остаточно обираємо допустиме значення сили F, як найменше з обчислених:

$$F = \min\{F_{[1]}; F_{[2]}; F_{[3]}\} = 558{,}1\ \text{кН}.$$

5. Визначаємо напруження в стержнях:

$$\sigma_1 = 200 \text{ МПа} = [\sigma];$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = -\frac{0{,}55 \cdot 558{,}1 \cdot 10^3}{16{,}0 \cdot 10^{-4}} \approx -192 \text{ МПа};$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_3} = \frac{0{,}34 \cdot 558{,}1 \cdot 10^3}{19{,}8 \cdot 10^{-4}} \approx 96 \text{ МПа}.$$

Умова міцності виконана, оскільки напруження в усіх стержнях не перевищує допустимого напруження.

Зразок виконання задачі 3

Дано:

$$F_1 = 200 \text{ кН}; \quad F_2 = 500 \text{ кН}; \quad \ell_1 = 0{,}4 \text{ м}; \quad \ell_2 = 0{,}4 \text{ м}; \quad \ell_3 = 0{,}1 \text{ м};$$

$$\delta = 0{,}2 \text{ мм}; \quad \Delta t = -40\ ^{\text{O}}\text{C}; \quad \alpha_t = 12{,}5 \cdot 10^{-6}\ {}^{1}\!/_{\text{град}};$$

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}; \quad \sigma_{\text{т}} = 240 \text{ МПа}; \quad n_{\text{т}} = 1{,}6.$$

Допустиме напруження: $[\sigma] = \dfrac{\sigma_{\text{т}}}{n_{\text{т}}} \approx 150 \text{ МПа}.$

Необхідно:

1. Розкрити статичну невизначуваність стержня при дії зовнішніх сил, побудувати епюру внутрішніх поздовжніх сил. З умови міцності визначити розміри поперечного перерізу (параметр площі A). Визначити напруження на
ділянках стержня, побудувати епюру напружень від дії зовнішнього навантаження.

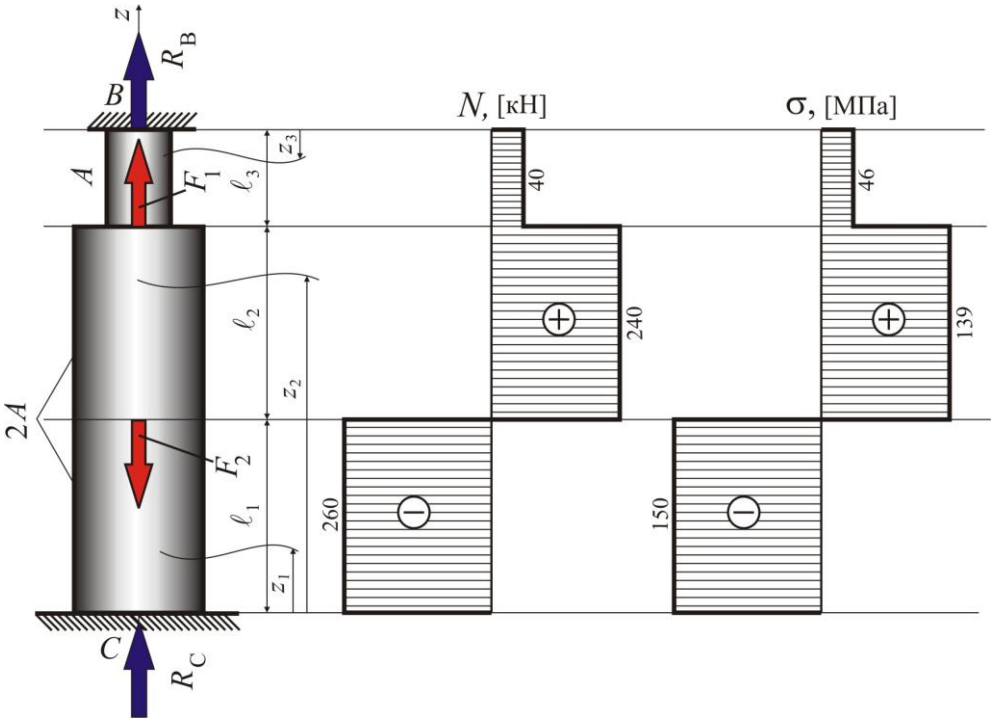
2. Розкрити статичну невизначуваність конструкції при наявності недосконалості виготовлення стержня. Визначити монтажні напруження в частинах стержня, побудувати епюру монтажних напружень.

3. Розкрити статичну невизначуваність конструкції при наявності зміни температури. Визначити температурні напруження в частинах стержня, побудувати епюру температурних напружень.

4. Побудувати епюру сумарних напружень. Перевірити виконання умови міцності стержня.

Рішення:

Урахування дії зовнішніх сил. Визначення розмірів поперечних перерізів



1. Встановлюємо ступінь статичної невизначеності

$$n = 2 - 1 = 1.$$

2. Статична сторона задачі. Рівняння статики

$$\sum Z = 0; \quad R_B + R_C + F_1 - F_2 = 0.$$

3. Геометрична сторона задачі. Рівняння сумісності переміщень

$$\Delta\ell_C = \Delta\ell_C(F_1) + \Delta\ell_C(F_2) + \Delta\ell_C(R_C) = 0.$$

5. Фізична сторона задачі

$$\Delta\ell_C(F_1) = -\frac{F_1 \cdot \ell_3}{EA}; \quad \Delta\ell_C(F_2) = \frac{F_2 \cdot \ell_3}{EA} + \frac{F_2 \cdot \ell_2}{2EA};$$

$$\Delta\ell_C(R_C) = -\frac{R_C \cdot \ell_3}{EA} - \frac{R_C \cdot (\ell_2 + \ell_1)}{2EA}.$$

6. Сумісне рішення рівнянь:

$$-\frac{F_1 \cdot \ell_3}{EA} + \frac{F_2 \cdot \ell_3}{EA} + \frac{F_2 \cdot \ell_2}{2EA} - \frac{R_C \cdot \ell_3}{EA} - \frac{R_C \cdot (\ell_2 + \ell_1)}{2EA} = 0.$$

Звідси

$$R_C = \frac{-F_1 \cdot 2\ell_3 + F_2 \cdot 2\ell_3 + F_2 \cdot \ell_2}{2\ell_3 + \ell_1 + \ell_2} = \frac{-40 + 100 + 200}{1{,}0} = 260 \text{ кН}.$$

$$R_B = -R_C - F_1 + F_2 = -260 - 200 + 500 = 40 \text{ кН}.$$

7. Будуємо епюру поздовжніх зусиль:

$0 \le z_1 \le \ell_1$; $\quad N(z_1) = -R_C = -260$ кН.

$\ell_1 \le z_2 \le \ell_1 + \ell_2$; $\quad N(z_2) = -R_C + F_2 = 240$ кН.

$0 \le z_3 \le \ell_3$; $\quad N(z_3) = R_B = 40$ кН.

8. Проводимо деформаційну перевірку побудови епюри N.

$$\Delta\ell_C = \Delta\ell_1 + \Delta\ell_2 + \Delta\ell_3 = \frac{N(z_1)\cdot \ell_1}{2EA} + \frac{N(z_2)\cdot \ell_2}{2EA} + \frac{N(z_3)\cdot \ell_3}{EA} =$$

$$= \frac{10^3}{EA}\left(-\frac{260 \cdot 0{,}4}{2} + \frac{240 \cdot 0{,}4}{2} + \frac{40 \cdot 0{,}1}{1}\right) = \frac{10^3}{EA}(-52 + 48 + 4) = 0.$$

9. Визначаємо небезпечну ділянку стержня, порівнюючи напруження, які обчислюються на ділянках з точністю до параметру площі A:

$$\sigma_1 = \frac{N(z_1)}{2A} = -\frac{260}{2A} = -\frac{130}{A};$$

$$\sigma_2 = \frac{N(z_2)}{2A} = \frac{240}{2A} = \frac{120}{A};$$

$$\sigma_3 = \frac{N(z_3)}{2A} = \frac{40}{A}.$$

Небезпечною є перша ділянка.

10.Визначаємо параметр площі A з умови міцності для першої ділянки:

$$\sigma_{\max} = |\sigma_1| = \frac{|N(z_1)|}{2A} \le [\sigma],$$

звідси

$$A \ge \frac{|N(z_1)|}{2 \cdot [\sigma]} = \frac{260 \cdot 10^3}{2 \cdot 150 \cdot 10^6} = 0{,}87 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2.$$

11. Будуємо епюру нормальних напружень від дії зовнішнього навантаження:

$$0 \le z_1 \le \ell_1; \qquad \sigma_1 = -[\sigma] = -150\,\text{МПа},$$

$$\ell_1 \le z_2 \le \ell_1 + \ell_2; \quad \sigma_2 = \frac{N(z_2)}{2A} = \frac{240 \cdot 10^3}{2 \cdot 0{,}87 \cdot 10^{-3}} \approx 139\ \text{МПа},$$

$$0 \le z_3 \le \ell_3; \qquad \sigma_3 = \frac{N(z_3)}{A} = \frac{40 \cdot 10^3}{0{,}87 \cdot 10^{-3}} \approx 46\ \text{МПа}.$$

Урахування недосконалості виготовлення

1. Статична сторона задачі. Рівняння статики:

$$\sum Z = 0; \quad -R_B^\delta + R_C^\delta = 0; \quad R_B^\delta = R_C^\delta.$$

2. Геометрична сторона задачі. Рівняння сумісності переміщень:

$$\Delta\ell_C = \Delta\ell_C\left(R_C^\delta\right) + \delta = 0.$$

3. Фізична сторона задачі:

$$\Delta\ell_C\left(R_C^\delta\right) = -\frac{R_C^\delta \cdot \ell_3}{EA} - \frac{R_C^\delta \cdot (\ell_2 + \ell_1)}{2EA}.$$

4. Сумісне рішення рівнянь:

$$\delta - \frac{R_C^\delta \cdot \ell_3}{EA} - \frac{R_C^\delta \cdot (\ell_2 + \ell_1)}{2EA} = 0.$$

$$R_C^\delta = \frac{2\delta \cdot EA}{2\ell_3 + \ell_1 + \ell_2} = \frac{0{,}2 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 0{,}87 \cdot 10^{-3}}{1{,}0} \approx 70\ \text{кН}.$$

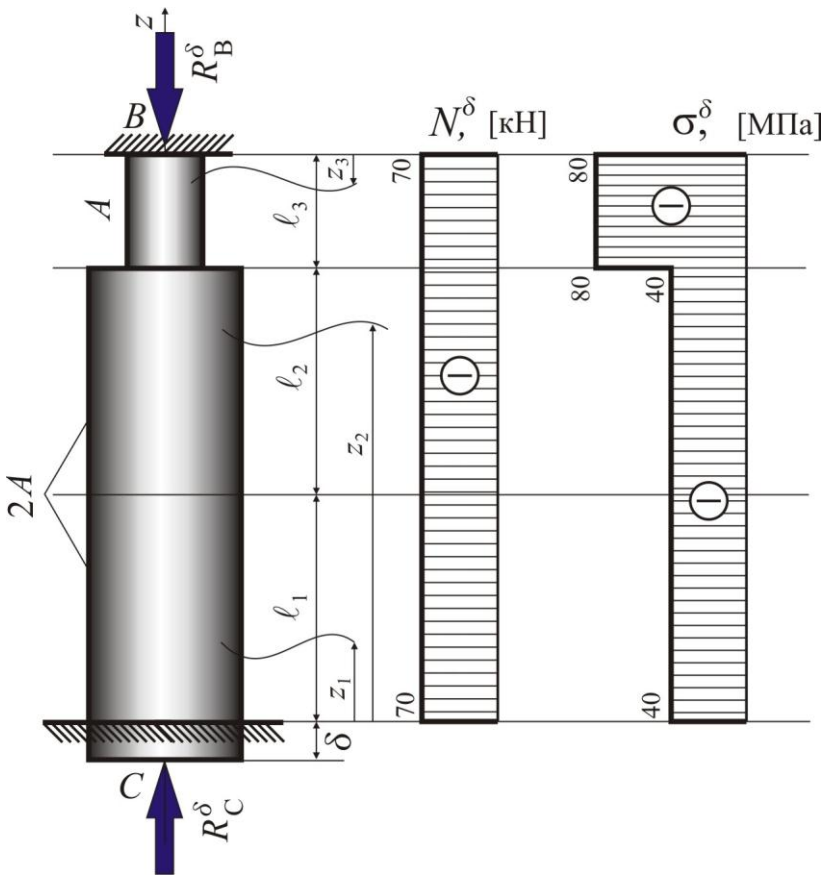
$$R_B^\delta = R_C^\delta \approx 70\ \text{кН}.$$

5. Будуємо епюру поздовжніх зусиль:

$$0 \le z_1 \le \ell_1; \qquad N^\delta(z_1) = -R_C^\delta = -70\ \text{кН}.$$

$$0 \le z_1 \le \ell_1; \qquad N^\delta(z_2) = -R_C^\delta = -70\ \text{кН}.$$

$$0 \le z_3 \le \ell_3; \qquad N^\delta(z_3) = -R_B^\delta = -70\ \text{кН}.$$



6. Проводимо деформаційну перевірку побудови епюри N^δ

$$\Delta\ell_C = \Delta\ell_1 + \Delta\ell_2 + \Delta\ell_3 + \delta = \frac{N^\delta(z_1)\cdot\ell_1}{2EA} + \frac{N^\delta(z_2)\cdot\ell_2}{2EA} +$$

$$+\frac{N^\delta(z_3)\cdot\ell_3}{EA} + \delta = -\frac{70\cdot10^3}{EA}\left(\frac{0{,}4}{2}+\frac{0{,}4}{2}+\frac{0{,}1}{1}\right) + 0{,}2\cdot10^{-3} =$$

$$= -0{,}201\cdot10^{-3} + 0{,}2\cdot10^{-3} \approx 0.$$

7. Будуємо епюру монтажних напружень:

$0 \le z_1 \le \ell_1$; $\quad \sigma_1^\delta = \dfrac{N^\delta(z_1)}{2A} = -\dfrac{70\cdot10^3}{2\cdot0{,}87\cdot10^{-3}} \approx -40$ МПа,

$0 \le z_1 \le \ell_1$; $\quad \sigma_2^\delta = \dfrac{N^\delta(z_2)}{2A} = -\dfrac{70\cdot10^3}{2\cdot0{,}87\cdot10^{-3}} \approx -40$ МПа,

$0 \le z_3 \le \ell_3$; $\quad \sigma_3^\delta = \dfrac{N^\delta(z_3)}{A} = -\dfrac{70\cdot10^3}{0{,}87\cdot10^{-3}} = -80$ МПа.

Урахування температурного навантаження

1. Статична сторона задачі. Рівняння статики:

$$\sum Z = 0; \quad R_B^t - R_C^t = 0; \quad R_B^t = R_C^t.$$

2. Геометрична сторона задачі. Рівняння сумісності переміщень:

$$\Delta\ell_C = \Delta\ell_C\left(R_C^t\right) + \delta_t = 0.$$

3. Фізична сторона задачі.

Обчислимо скорочення незакріпленого стержня при його охолодженні:

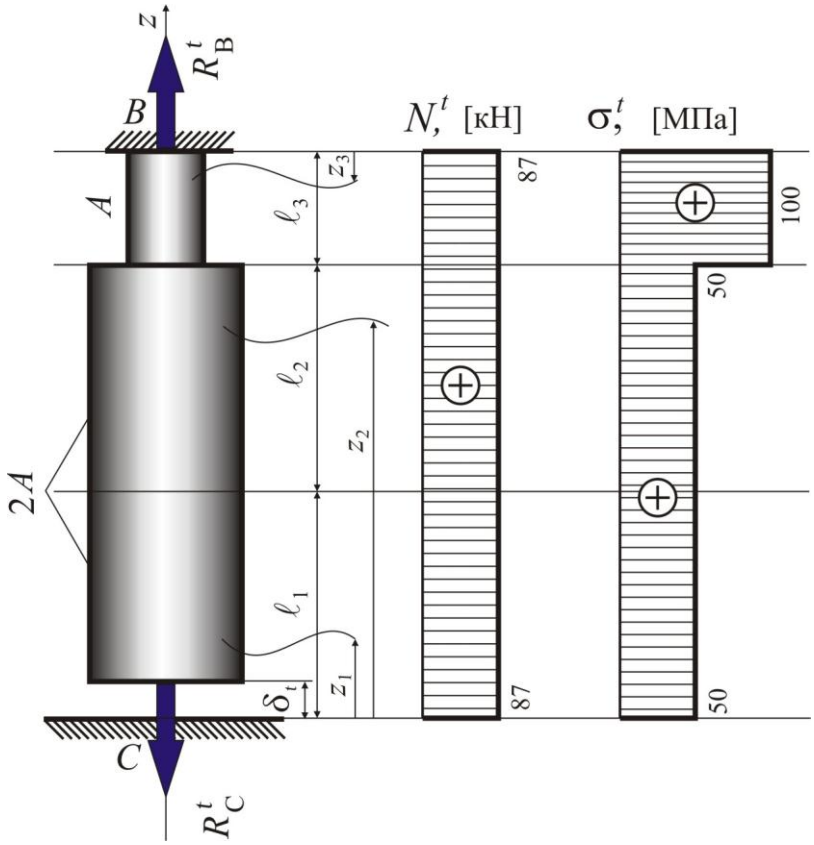
$$\delta_t = \alpha_t\left(\ell_1 + \ell_2 + \ell_3\right)\Delta t = 12{,}5\cdot 10^{-6}\cdot 0{,}5\cdot\left(-40\right) = -0{,}25\cdot 10^{-3}\ \text{м},$$

та його подовження під дією реакції опори:

$$\Delta\ell_C\left(R_C^t\right) = \frac{R_C^t\cdot\ell_3}{EA} + \frac{R_C^t\cdot\left(\ell_2+\ell_1\right)}{2EA}.$$

4. Сумісне рішення рівнянь:

$$\delta_t + \frac{R_C^t\cdot\ell_3}{EA} + \frac{R_C^t\cdot\left(\ell_2+\ell_1\right)}{2EA} = 0.$$



$$R_C^t = -\frac{\delta_t \cdot 2EA}{2\ell_3 + \ell_1 + \ell_2} = \frac{0{,}25 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 0{,}87 \cdot 10^{-3}}{1{,}0} = 87 \text{ кН}.$$

$$R_B^t = R_C^t = 87 \text{ кН}.$$

5. Будуємо епюру поздовжніх зусиль:

$0 \le z_1 \le \ell_1;$ $\quad N^t(z_1) = R_C^t = 87$ кН.

$\ell_1 \le z_2 \le \ell_1 + \ell_2;$ $\quad N^t(z_2) = R_C^t = 87$ кН.

$0 \le z_3 \le \ell_3;$ $\quad N^t(z_3) = R_B^t = 87$ кН.

6. Проводимо деформаційну перевірку побудови епюри N^t:

$$\Delta\ell_C = \Delta\ell_1 + \Delta\ell_2 + \Delta\ell_3 + \delta_t = \frac{N^t(z_1) \cdot \ell_1}{2EA} + \frac{N^t(z_2) \cdot \ell_2}{2EA} +$$

$$+ \frac{N^t(z_3) \cdot \ell_3}{EA} + \delta_t = \frac{87 \cdot 10^3}{EA}\left(\frac{0{,}4}{2} + \frac{0{,}4}{2} + \frac{0{,}1}{1}\right) - 0{,}25 \cdot 10^{-3} =$$

$$= 0{,}25 \cdot 10^{-3} - 0{,}25 \cdot 10^{-3} = 0.$$

7. Будуємо епюру температурних напружень:

$0 \le z_1 \le \ell_1;$ $\quad \sigma_1^t = \dfrac{N^t(z_1)}{2A} = \dfrac{87 \cdot 10^3}{2 \cdot 0{,}87 \cdot 10^{-3}} = 50$ МПа,

$\ell_1 \le z_2 \le \ell_1 + \ell_2;$ $\quad \sigma_2^t = \dfrac{N^t(z_2)}{2A} = \dfrac{87 \cdot 10^3}{2 \cdot 0{,}87 \cdot 10^{-3}} = 50$ МПа,

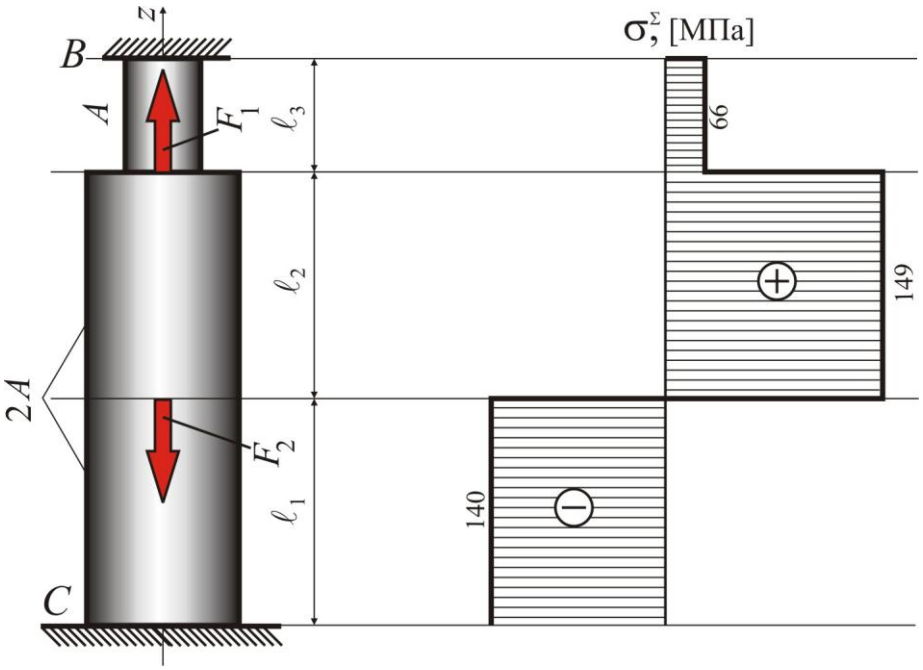
$0 \le z_3 \le \ell_3;$ $\quad \sigma_3^t = \dfrac{N^t(z_3)}{A} = \dfrac{87 \cdot 10^3}{0{,}87 \cdot 10^{-3}} = 100$ МПа.

Визначення сумарних напружень

$$\sigma_1^{\Sigma} = \sigma_1 + \sigma_1^{\delta} + \sigma_1^{t} = -150 - 40 + 50 = -140 \text{ МПа},$$

$$\sigma_2^{\Sigma} = \sigma_2 + \sigma_2^{\delta} + \sigma_2^{t} = 139 - 40 + 50 = 149 \text{ МПа},$$

$$\sigma_3^{\Sigma} = \sigma_3 + \sigma_3^{\delta} + \sigma_3^{t} = 46 - 80 + 100 = 66 \text{ МПа}.$$



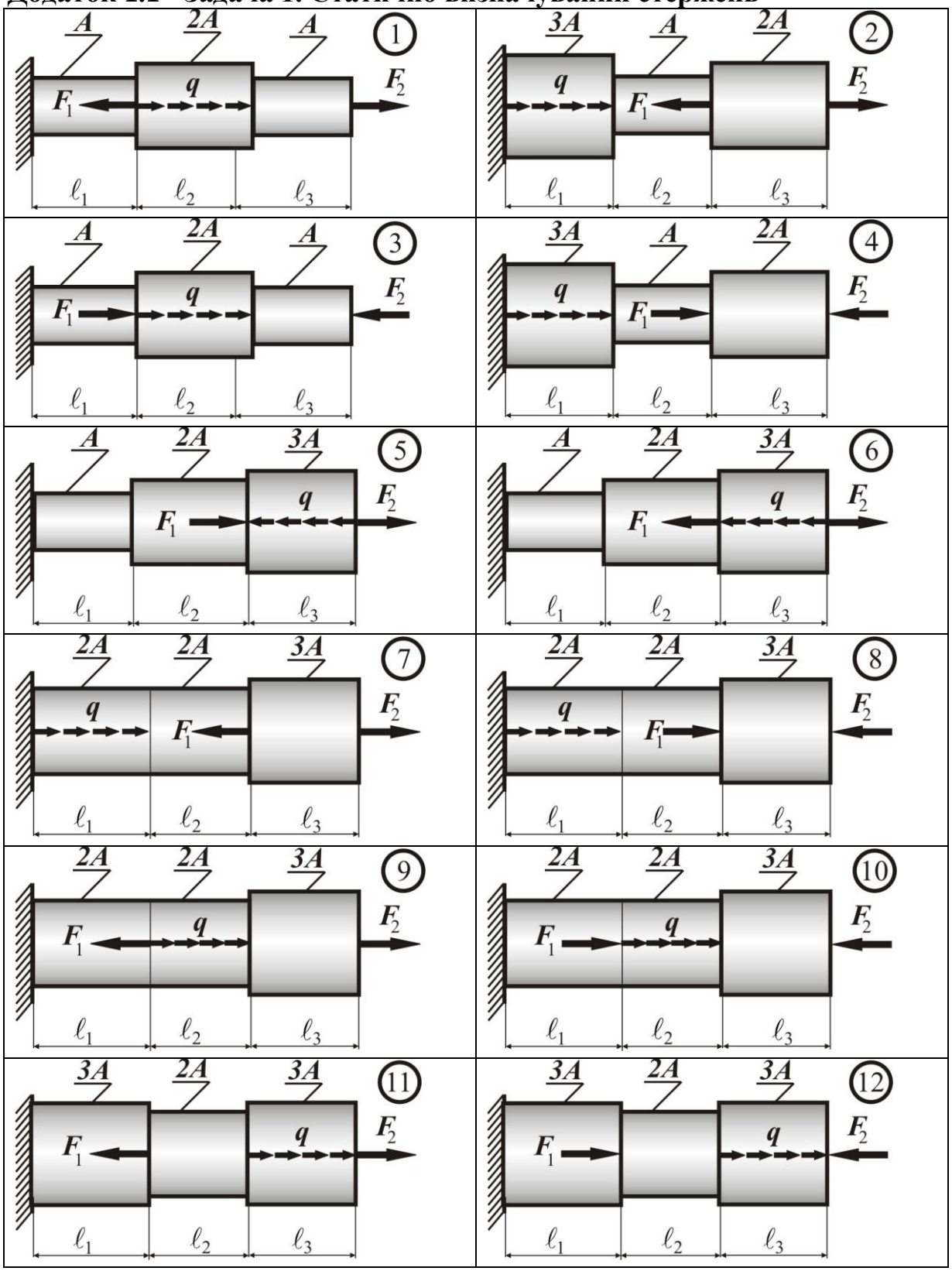
Максимальне напруження по абсолютному значенню – на другій ділянці.

$$\sigma_{\max} = |\sigma_2| = 149 \text{ МПа} < [\sigma] = 150 \text{ МПа}.$$

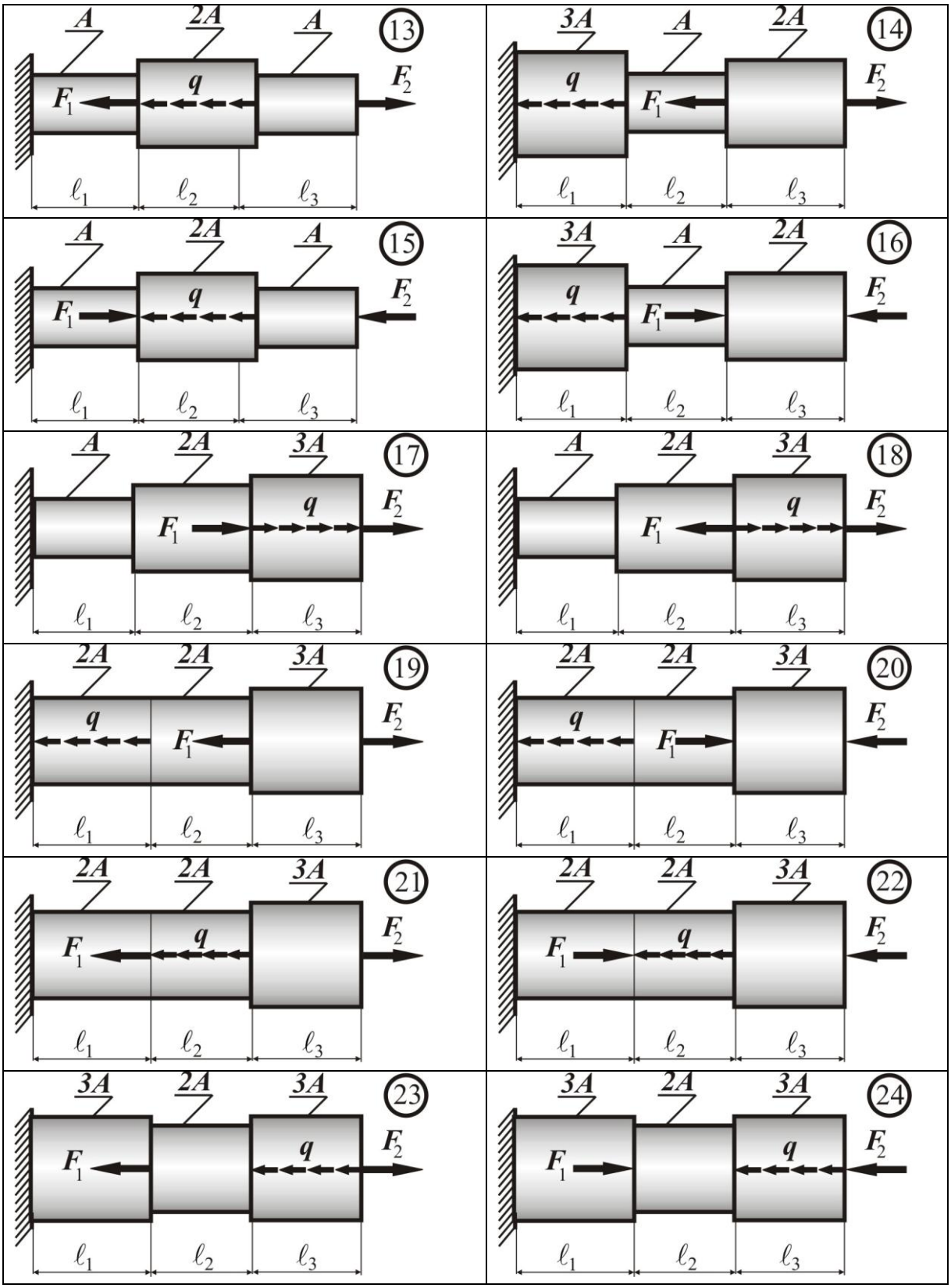
Умова міцності виконана.

1.3.4. Розрахункові схеми та чисельні дані

Додаток 1.1− Задача 1. Статично визначуваний стержень



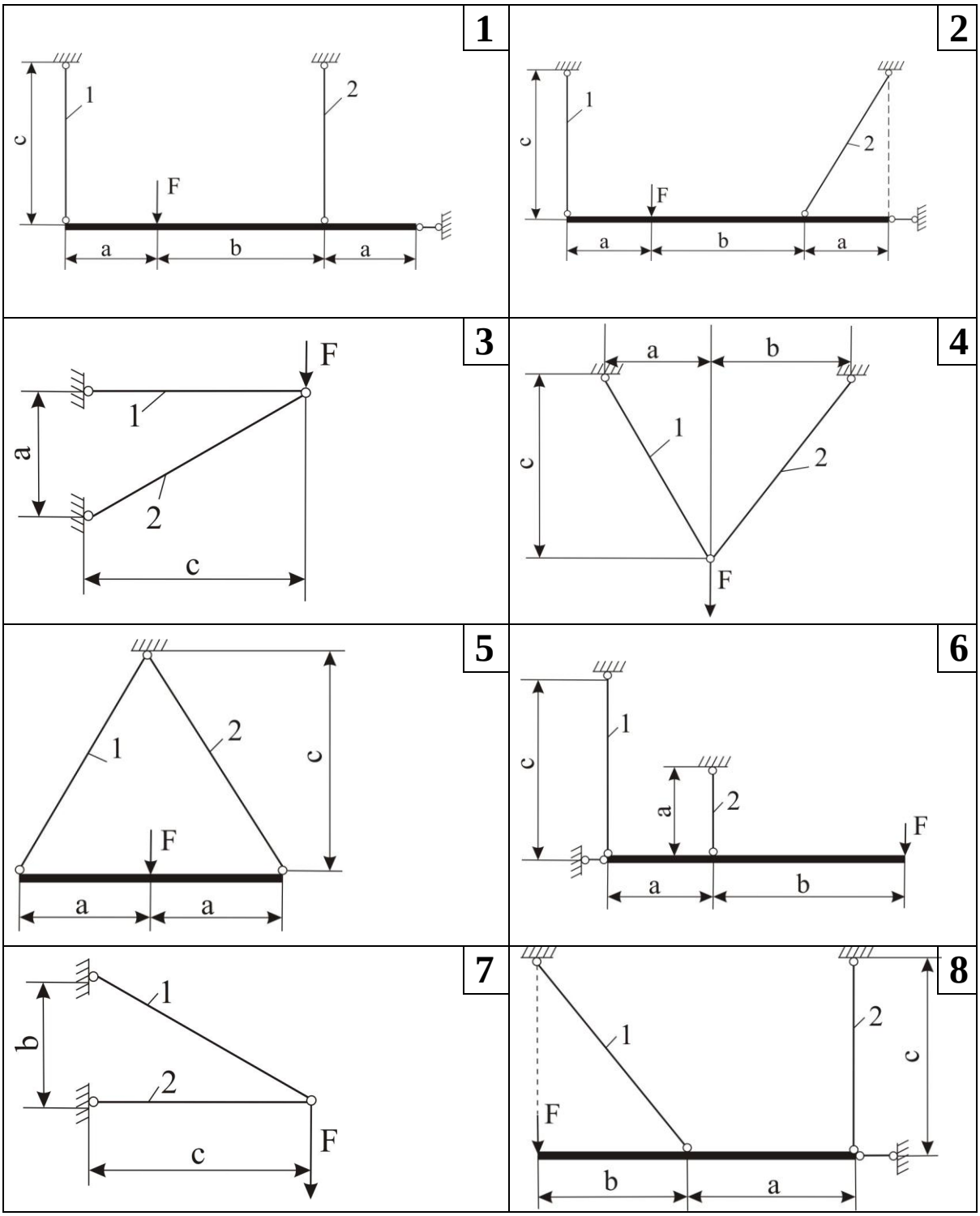
Продовження додатка 1.1



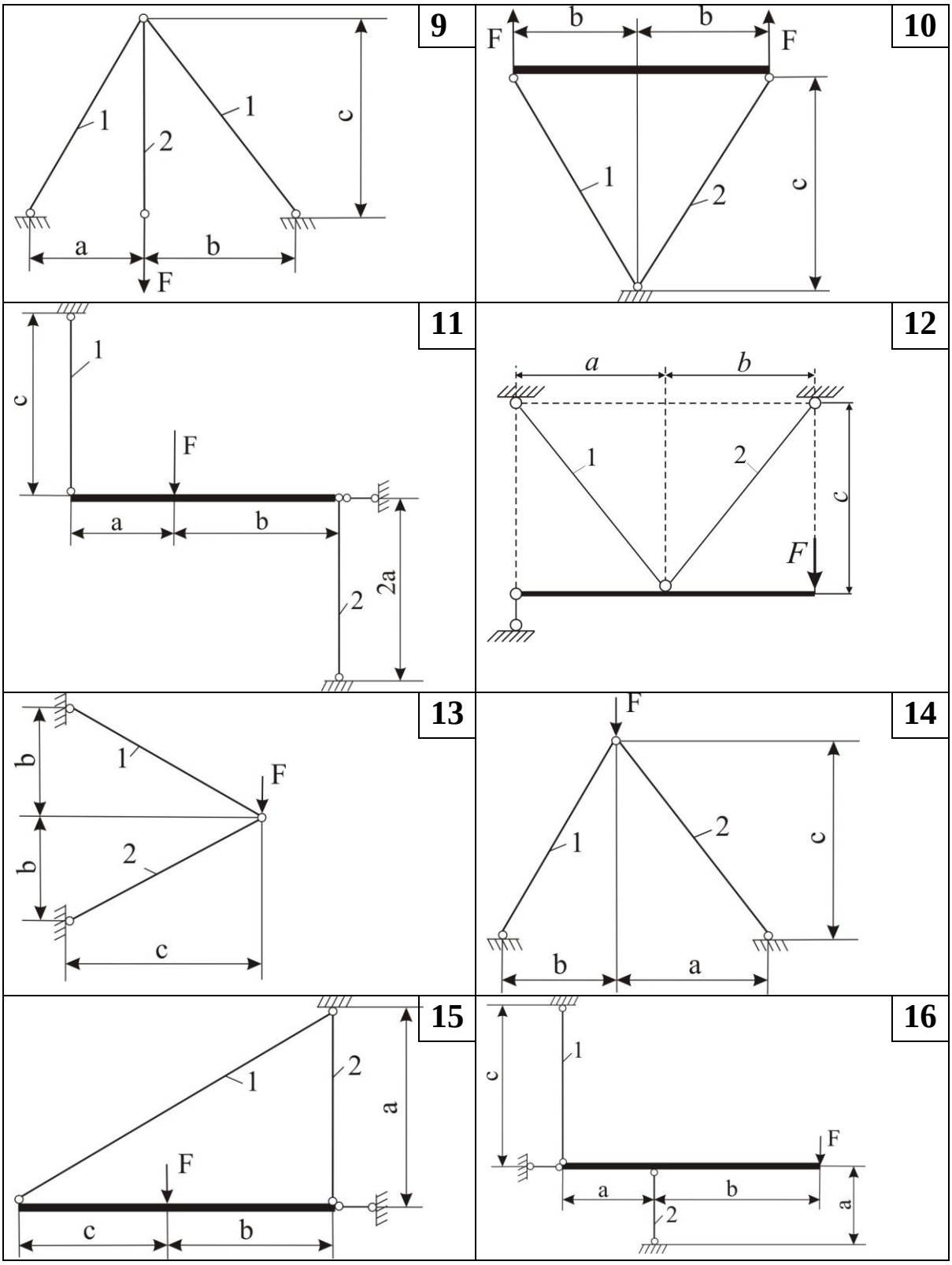
Таблиця Д1.1 − Вхідні дані до задачі 1

№ вар.	F_1 кН	F_2 кН	q кН/м	ℓ_1 м	ℓ_2 м	ℓ_3 м	$A \cdot 10^3$ м^2	$n_т$
1.	200	400	500	0,5	0,4	0,3	1,90	1,2
2.	300	250	400	0,4	0,5	0,6	1,75	1,5
3.	400	200	250	0,3	0,4	0,5	2,00	1,8
4.	100	300	100	0,2	0,3	0,4	2,10	1,6
5.	250	400	300	0,4	0,3	0,5	1,80	1,4
6.	400	200	250	0,3	0,5	0,4	1,50	1,2
7.	250	300	100	0,6	0,4	0,5	1,60	1,5
8.	200	400	300	0,5	0,3	0,4	1,90	1,8
9.	300	100	500	0,4	0,2	0,3	1,75	1,6
10.	400	250	400	0,5	0,4	0,3	2,00	1,4
11.	500	200	400	0,4	0,3	0,5	1,90	1,2
12.	400	300	250	0,5	0,6	0,4	1,75	1,5
13.	250	400	200	0,4	0,5	0,3	2,00	1,8
14.	100	100	300	0,3	0,4	0,2	2,10	1,6
15.	300	250	400	0,3	0,5	0,4	1,80	1,4
16.	250	400	200	0,5	0,4	0,3	1,50	1,2
17.	100	250	300	0,4	0,5	0,6	1,60	1,5
18.	300	200	400	0,3	0,4	0,5	1,90	1,8
19.	500	300	100	0,2	0,3	0,4	1,75	1,6
20.	400	400	250	0,4	0,3	0,5	2,00	1,4
21.	200	400	500	0,4	0,5	0,6	1,75	1,5
22.	400	200	250	0,2	0,3	0,4	2,10	1,6
23.	400	200	250	0,6	0,4	0,5	1,60	1,5
24.	250	400	200	0,4	0,3	0,5	2,00	1,4

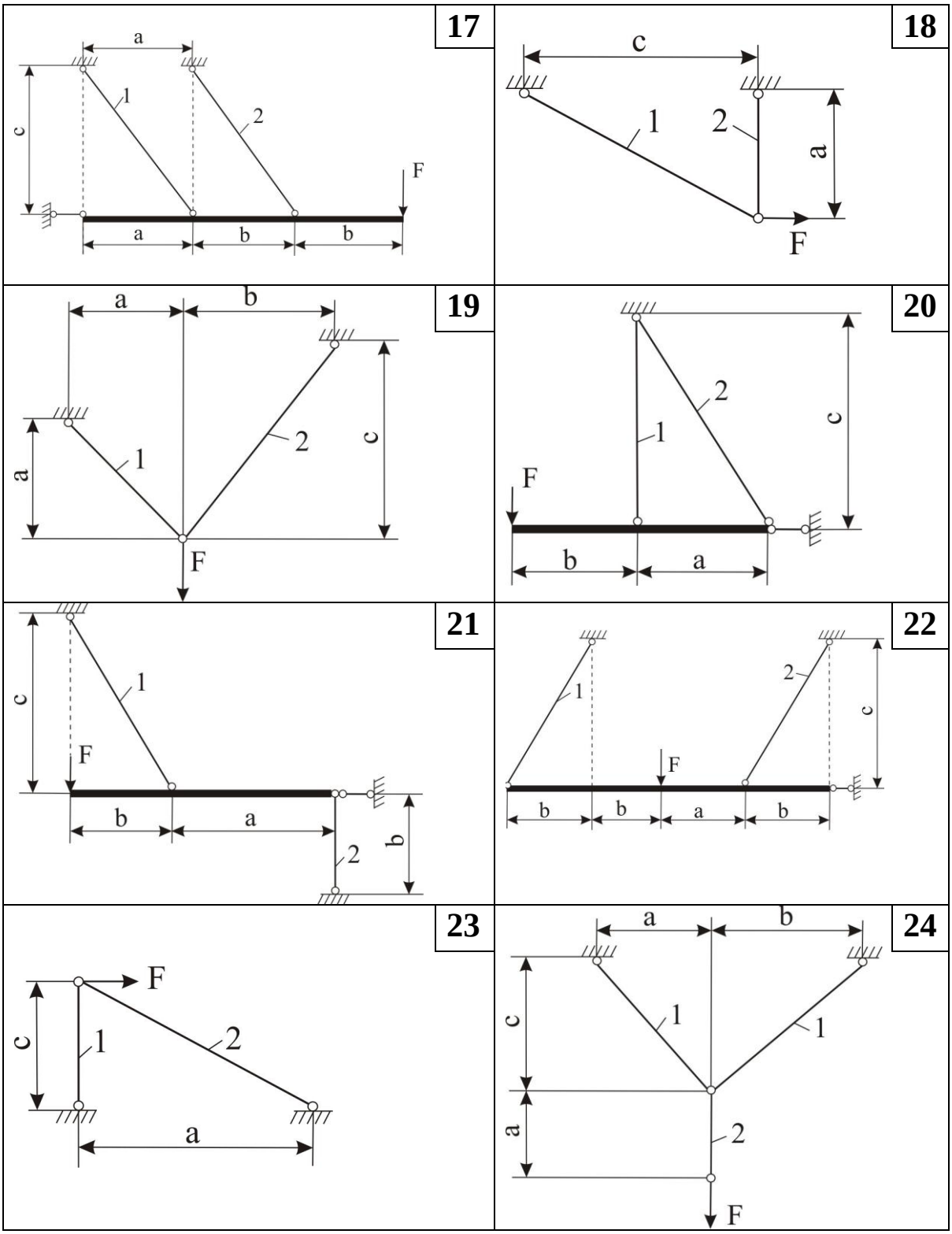
Додаток 1.2 − Задача 2. Статично визначувана стержньова система



Продовження додатка 1.2



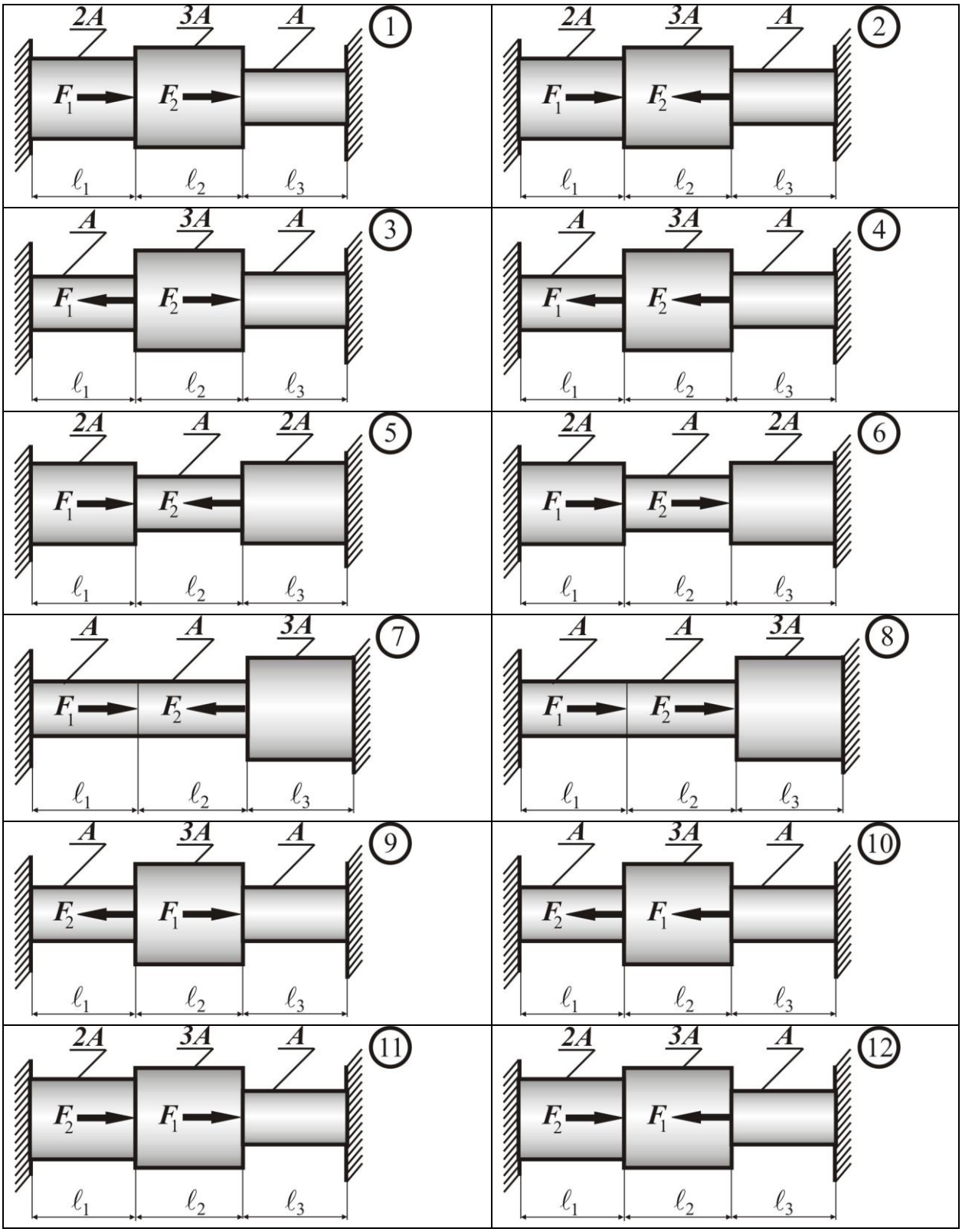
Продовження додатка 1.2



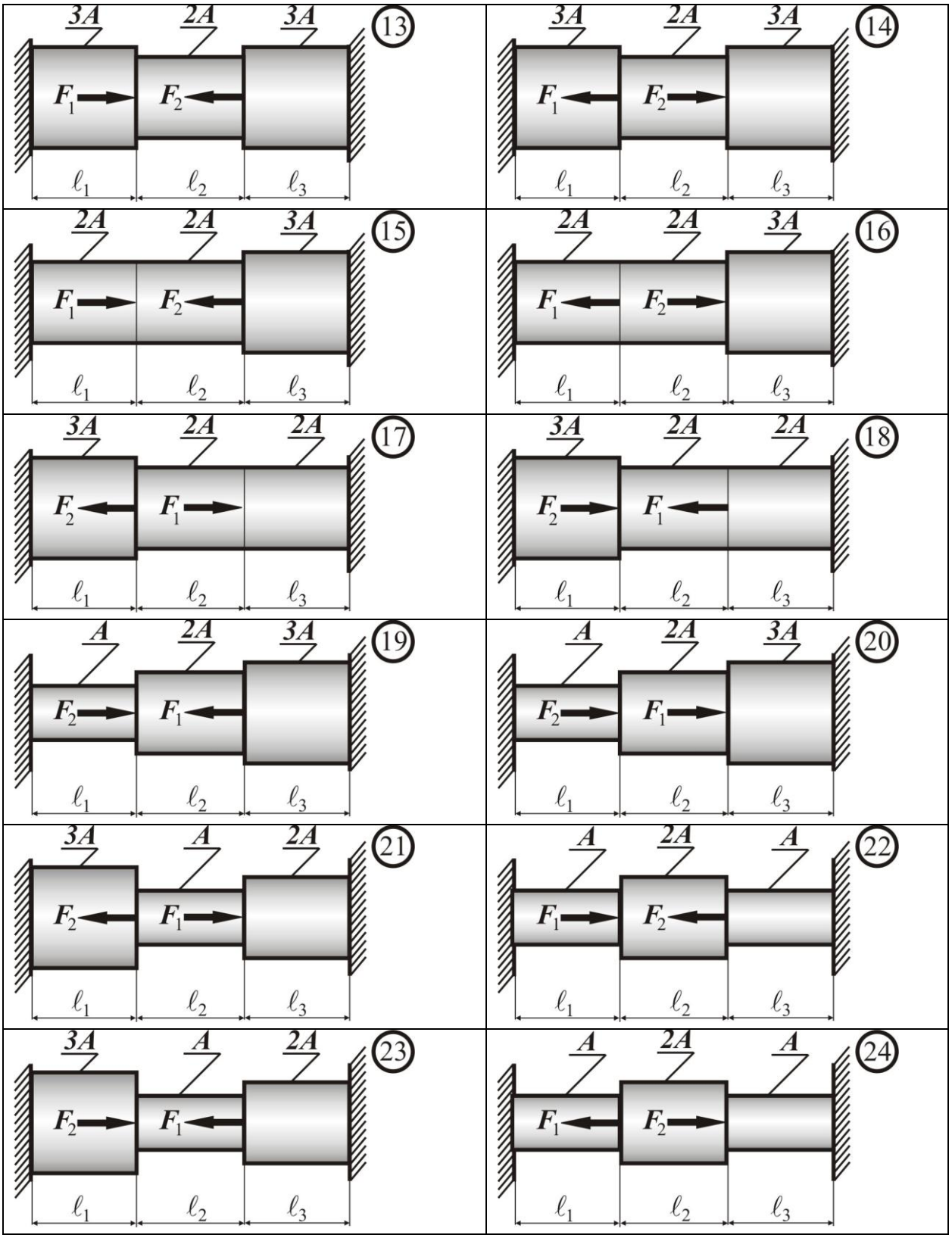
Таблиця Д1.2 − Вхідні дані до задачі 2

№ вар	Переріз 1	Переріз 2	a, м	b, м	c, м	$n_т$
1.	][№ 10	▢ d=4 см	1,5	2,0	1,8	1,2
2.	○ d=4 см	I № 12	1,6	1,8	2,0	1,4
3.	╪ ∟ № 5,6/4	▢ d=4 см	1,8	2,0	1,6	1,5
4.	] № 16	○ d=5 см	1,4	1,6	1,8	1,6
5.	▢ d=5 см	][№ 12	2,0	1,8	1,6	1,8
6.	I № 22	╪ ∟ № 6,5/6	2,2	2,0	1,8	1,2
7.	▢ d=4 см	] № 16	1,8	1,5	2,0	1,4
8.	○ d=4 см	][№ 12	2,0	1,6	1,8	1,5
9.	╪ ∟ № 5/4	I № 14	1,6	1,8	2,0	1,6
10.	▢ d=4 см	][№ 10	1,8	1,4	1,6	1,8
11.	I № 12	○ d=4 см	1,6	2,0	1,8	1,2
12.	▢ d=4 см	╪ ∟ № 5,6/4	1,8	2,2	2,0	1,4
13.	○ d=5 см	] № 16	1,5	2,0	1,8	1,5
14.	][№ 12	▢ d=5 см	1,6	1,8	2,0	1,6
15.	╪ ∟ № 6,5/6	I № 22	1,8	2,0	1,6	1,8
16.	] № 16	▢ d=4 см	1,4	1,6	1,8	1,2
17.	][№ 12	○ d=4 см	2,0	1,8	1,6	1,4
18.	I № 14	╪ ∟ № 5/4	2,2	2,0	1,8	1,5
19.	I № 14	▢ d=4 см	1,8	1,5	2,0	1,6
20.	][№ 10	○ d=5 см	2,0	1,6	1,8	1,8
21.	○ d=4 см	][№ 12	1,6	1,8	2,0	1,2
22.	╪ ∟ № 5,6/4	○ d=4 см	1,8	1,4	1,6	1,4
23.	] № 16	I № 14	1,6	2,0	1,8	1,5
24.	▢ d=5 см	][№ 12	1,8	2,2	2,0	1,6

Додаток 1.3 − Задача 3. Статично невизначуваний стержень



Продовження додатка 1.3



Таблиця Д1.3 − Вхідні дані до задачі 3

№ вар	F_1, кН	F_2, кН	ℓ_1, м	ℓ_2, м	ℓ_3, м	Δt, ^0C	δ, мм	$n_т$
1.	200	400	0,5	0,4	0,3	20	-0,3	1,2
2.	300	250	0,4	0,5	0,6	25	-0,4	1,5
3.	400	200	0,3	0,4	0,5	30	-0,2	1,8
4.	100	300	0,2	0,3	0,4	-20	0,3	1,6
5.	250	400	0,4	0,3	0,5	-25	0,2	1,4
6.	400	200	0,3	0,5	0,4	-30	0,3	1,2
7.	250	300	0,6	0,4	0,5	25	-0,3	1,5
8.	200	400	0,5	0,3	0,4	30	-0,4	1,8
9.	300	100	0,4	0,2	0,3	-20	-0,2	1,6
10.	400	250	0,5	0,4	0,3	-25	0,3	1,4
11.	500	200	0,4	0,3	0,5	20	0,2	1,2
12.	400	300	0,5	0,6	0,4	25	0,3	1,5
13.	250	400	0,4	0,5	0,3	30	-0,2	1,8
14.	100	100	0,3	0,4	0,2	-20	0,3	1,6
15.	300	250	0,3	0,5	0,4	-25	0,2	1,4
16.	250	400	0,5	0,4	0,3	-30	0,3	1,2
17.	100	250	0,4	0,5	0,6	25	-0,3	1,5
18.	300	200	0,3	0,4	0,5	30	-0,4	1,8
19.	500	300	0,2	0,3	0,4	-20	-0,2	1,6
20.	400	400	0,4	0,3	0,5	-25	0,3	1,4
21.	200	400	0,4	0,5	0,6	20	0,2	1,5
22.	400	200	0,2	0,3	0,4	-20	-0,4	1,6
23.	400	200	0,6	0,4	0,5	25	-0,2	1,5
24.	250	400	0,4	0,3	0,5	20	0,3	1,4

Додаток 1.4. Таблиця Д1.4 − Механічні характеристики сталей

№	Марка сталі	Модуль пружності, $E \cdot 10^{-5}$, МПа	Границя текучості, $\sigma_{\text{т}}$, МПа	Температурний коефіцієнт лінійного розширення, $\alpha_t \cdot 10^6$, $1/\text{град}$
1.	**Ст 10**	2,10	210	11,6
2.	**Ст 20**	2,13	250	11,1
3.	**Ст 25**	1,98	280	11,1
4.	**Ст 30**	2,00	300	12,6
5.	**Ст 35**	2,06	320	11,9
6.	**Ст 40**	2,13	340	12,4
7.	**Ст 45**	2,00	360	11,7
8.	**Ст 50**	2,16	380	12,0
9.	**Ст 55**	2,10	390	11,0
10.	**Ст 60**	2,04	410	11,1
11.	**Ст 20Г**	2,04	280	12,3
12.	**Ст 30Г**	2,04	320	12,6
13.	**Ст 50Г**	2,16	400	11,6
14.	**Ст 20Х**	2,16	650	11,3
15.	**Ст 40Х**	2,14	800	13,4
16.	**Ст 45Х**	2,06	850	12,8
17.	**Ст 30ХМ**	2,03	750	12,3
18.	**Ст 35ХМ**	2,04	850	12,3
19.	**Ст 40ХН**	2,00	800	11,8
20.	**Ст 50ХН**	2,00	900	11,8
21.	**Ст 15ХФ**	2,06	550	12,0
22.	**Ст 40ХФА**	2,00	750	11,0
23.	**Ст 20ХГСА**	1,96	650	11,0
24.	**Ст 30ХГС**	1,94	850	11,0

Додаток 1.5 − Основні поняття, позначення, формули, формулювання та правила з теми «Розтягання ─ стискання стержнів»

Позначення та формули	Одиниця виміру	Назва
$\Delta\ell = \ell_1 - \ell_0$	м (метр)	абсолютна поздовжня деформація
$\Delta b = b_1 - b_0$	м (метр)	абсолютна поперечна деформація
$\varepsilon = \dfrac{\Delta\ell}{\ell_0}$		відносна поздовжня деформація
$\varepsilon' = \dfrac{\Delta b}{b_0}$		відносна поперечна деформація
$\mu = \left\lvert \dfrac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right\rvert$		коефіцієнт Пуассона
$N = \sum F_{\text{iz}}$	Н (ньютон)	внутрішня поздовжня сила
$A = \int\limits_A dA$	$м^2$	площа поперечного перерізу
$\sigma = \dfrac{N}{A}$	Па (паскаль)	нормальне напруження
E	Па (паскаль)	модуль пружності (поздовжньої пружності)
$\sigma = E \cdot \varepsilon.$		закон Гука
$\sigma = \dfrac{N}{A} \le [\sigma]$		умова міцності при центральному розтяганні-стисканні
$\Delta\ell = \dfrac{N\ell}{EA} \le [\Delta\ell]$		умова жорсткості при центральному розтяганні-стисканні

Поздовжня сила $N(z)$ в довільному перерізі чисельно дорівнює алгебраїчній сумі проекцій на вісь стержня (вісь Z) зовнішніх сил, які розташовані по один бік від перерізу (всіх однобічних сил).

Правило знаків*:* поздовжня сила приймається позитивною (додатною), якщо викликає деформацію розтягання, і негативною (від'ємною), якщо викликає деформацію стискання.

Контрольні питання

1. Що називається центральним розтяганням − стисканням?

2. Які внутрішні силові фактори мають місце в перерізах стержня при центральному розтяганні − стисканні?

3. Сформулюйте правила побудови епюри внутрішньої поздовжньої сили.

4. У чому полягає суть гіпотези плоских перерізів в умовах центрального розтягання?

5. За якою формулою обчислюються нормальні напруження при центральному розтяганні − стисканні? Який вигляд має умова міцності?

6. Які види розрахунків можливі за умовою міцності?

7. Який вигляд має закон Гука при центральному розтяганні − стисканні?

8. Чи всі матеріали підкоряються закону Гука?

9. Що таке модуль пружності матеріалу?

10. Що таке коефіцієнт Пуассона?

11.За якою формулою обчислюються абсолютні деформації стержнів при центральному розтяганні − стисканні?

12. Які геометричні характеристики використовуються в розрахунках на міцність при центральному розтяганні − стисканні?

13. Що називається жорсткістю стержня при розтяганні − стисканні?

14.Який вигляд має умова жорсткості ?

15. Які напруження виникають при центральному розтяганні − стисканні на похилих площадках?

16. У якому перерізі стержня при центральному розтяганні − стисканні виникають максимальні нормальні напруження і у якому перерізі – максимальні дотичні напруження?

17. У чому полягає закон парності дотичних напружень?

18. Які системи називаються статично невизначуваними?

19. Які додаткові рівняння окрім рівнянь статичної рівноваги необхідно скласти для вирішення статично невизначуваних задач?

20. В якому порядку виконується розрахунок статично невизначуваних систем при центральному розтяганні − стисканні?

21. В чому полягає деформаційна перевірка правильності розкриття статичної невизначуваності при центральному розтяганні − стисканні?

2. ЗГИНАННЯ

2.1. Згинання прямолінійних стержнів

2.1.1. Класифікація згинання та типи опор

Згинанням називається тип деформування стержня, при якому в його поперечних перерізах виникають згинальні моменти.

Класифікація згинання. Згинання підрозділяється на **поперечне** (зовнішнє навантаження діє в напрямку, перпендикулярному осі стержня), **поздовжнє** (зовнішні сили діють уздовж осі стержня) та **поздовжньо-поперечне**.

Поперечне згинання підрозділяється на **плоске**, при якому згинальні сили лежать в одній площині, та **просторове**, при якому зовнішні згинальні сили довільно орієнтовані у просторі.

Плоске згинання підрозділяється на **пряме** та **косе**. У випадку прямого згинання площина дії згинальних навантажень збігається з однією з головних площин стержня. На рис. 2.1 показаний випадок навантаження стержня при прямому поперечному згинанні. Зовнішні сили розташовані у площині ***YOZ,*** що збігається з головною віссю перерізу ***Y***. При косому згинанні площина дії згинальних навантажень не збігається з жодною з головних площин.

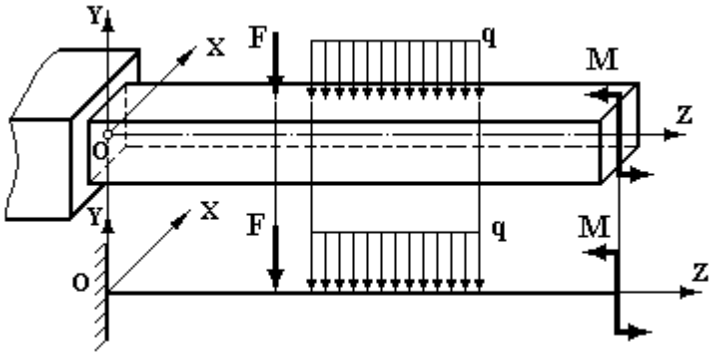


Рисунок 2.1

Чисте згинання – такий випадок згинання, при якому поперечна сила Q_y дорівнює нулю, а згинальний момент M_x є єдиним внутрішнім силовим фактором у перерізі стержня і виявляється постійним на ділянці стержня.

Розглянемо згинання балок. **Балкою називається прямолінійний стержень, що працює на згинання**. Балки закріплені на опорах, які забороняють переміщення балки як твердого цілого. Види опор та реактивні зусилля в них показані на рис. 2.2.

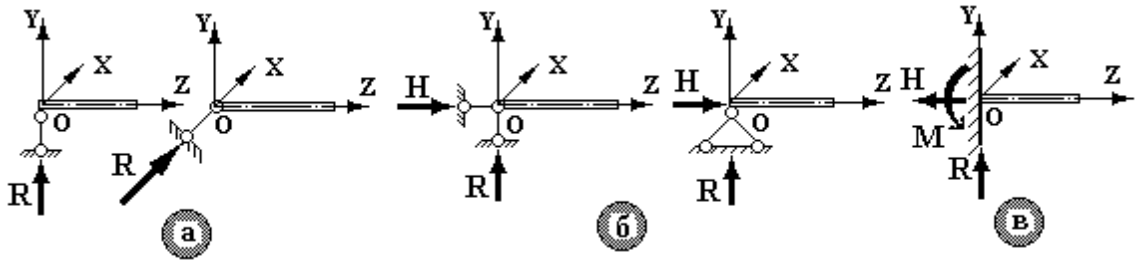


Рисунок 2.2

У шарнірно-рухомій опорі (рис. 2.2 а) виникає одна реактивна сила R, що діє перпендикулярно поверхні опори (у напрямку показаного зв'язку). У шарнірно-нерухомій опорі (рис. 2.2 б) виникають дві складових реакції: вертикальна R і горизонтальна H. У затисненні (жорсткому затисненні) (рис.2.2 в), виникають три складові: вертикальна R, горизонтальна H і момент M.

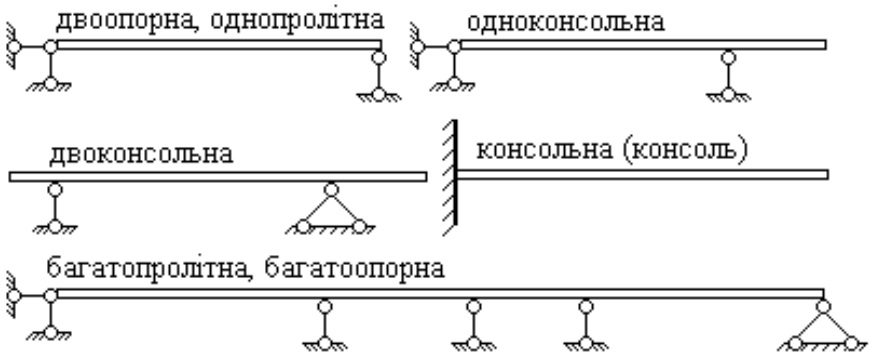


Рисунок 2.3

Для кінематичної незмінюваності плоских балок необхідна кількість зовнішніх зв'язків дорівнює трьом. Але при плоскому згинанні горизонтальна складова H реакції в шарнірно-нерухомій опорі тотожно дорівнює

нулю, тому надалі для визначення реакцій опор використовуємо два рівняння статики. Якщо кількість зовнішніх поперечних зв'язків більше двох, то така балка називається статично невизначуваною (багатоопорною). Типи і найменування балок, що зустрічаються, показані на рис. 2.3.

2.1.2. Поперечна сила Q_y та згинальний момент M_x, як внутрішні силові фактори при згинанні

Проаналізуємо внутрішні силові фактори у поперечному перерізі балки при прямому поперечному згинанні, а потім сформулюємо основні правила побудови епюр Q_y і M_x.

Розглянемо консольний стержень з затисненим правим торцем та навантажений силами F_1 і F_2 (рис. 2.4). Нехай $F_1 > F_2$.

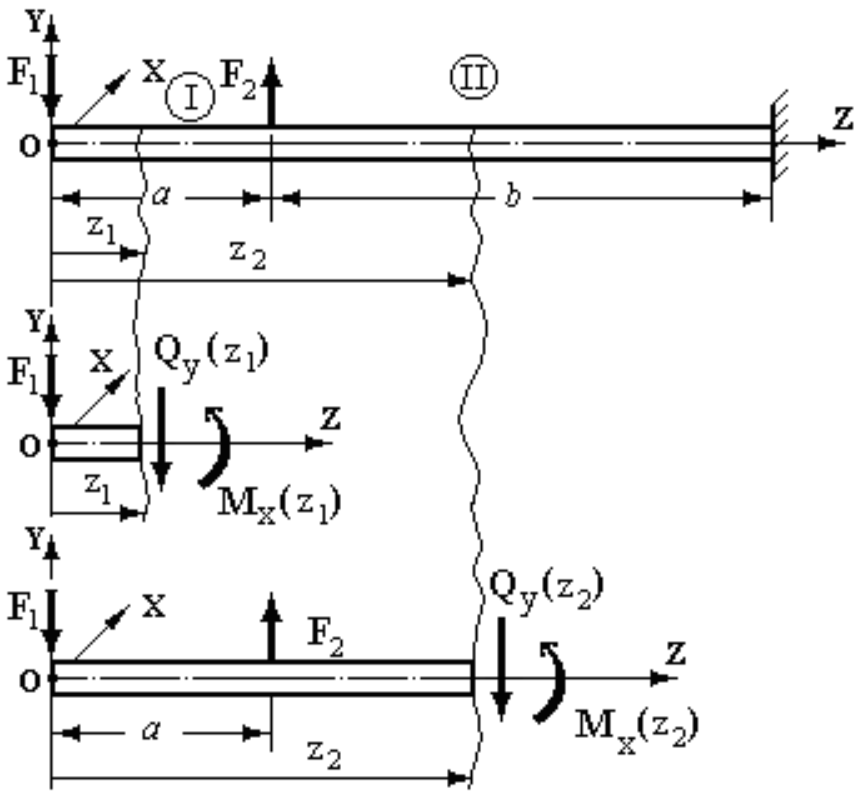


Рисунок 2.4

Згідно методу перерізів розріжемо балку на першій і другій ділянках, покажемо відсічені частини, замінимо дію відкинутих частин на залишену внутрішніми силовими факторами Q_y і M_x. З умов статики визначимо їхні значення:

перша ділянка: $\Sigma F_i = -F_1 - Q_y(z_1) = 0$, звідки $Q_y(z_1) = -F_1$;

$$\Sigma M_i = F_1 \cdot z_1 + M_x(z_1) = 0, \text{ звідки } M_x(z_1) = -F_1 \cdot z_1.$$

друга ділянка: $\Sigma F_i = -F_1 + F_2 - Q_y(z_2) = 0$, звідки $Q_y(z_2) = -F_1 + F_2$;

$\Sigma M_i = F_1 \cdot z_2 - F_2 \cdot (z_2) + M_x(z_2) = 0$, звідки $M_x(z_2) = -F_1 \cdot z_2 + F_2 \cdot (z_2 - a)$.

Використовуючи такі позначення, сформулюємо наступні правила для визначення поперечної сили та згинального моменту при згинанні.

Поперечна сила в даному перерізі – Q_y чисельно дорівнює алгебраїчній сумі проекцій на нормаль (вісь *Y*) до осі стержня сил, розташованих по одну сторону від перерізу (всіх однобічних сил), та утворює заміну дії відкинутої частини на залишену.

Правило знаків для Q_y: поперечна сила вважається позитивною (додатною), якщо обертає розглянуту відсічену частину балки відносно центра ваги перерізу за годинниковою стрілкою, та негативною (від'ємною) –якщо проти годинникової стрілки.

Згинальний момент M_x в даному перерізі z – чисельно дорівнює алгебраїчній сумі моментів щодо поперечної осі перерізу сил, які розташовані по одну сторону від цього перерізу (всіх однобічних сил).

Правило знаків для M_x : згинальний момент вважається позитивним (додатним), якщо відсічена частина згинається опуклістю вниз (стиснуте волокно вгорі, розтягнуте внизу), та негативним (від'ємним) – якщо навпаки. Таким чином, епюра згинальних моментів будується з боку стиснутих волокон.

Схематично прийняті правила знаків виглядають так:

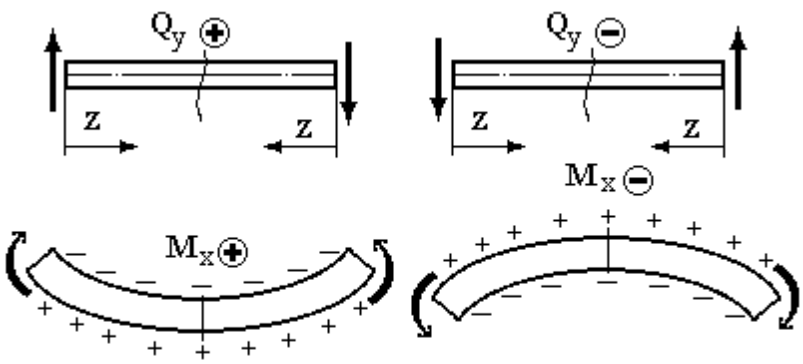


Рисунок 2.5

2.1.3. Диференціальні залежності при згинанні

Розглянемо балку, навантажену довільним розподіленим навантаженням $q(z)$ (рис. 2.6 а). В перерізі на відстані z виділимо елемент довжиною dz. В перерізі I діють внутрішні силові фактори Q_y і M_x, в перерізі II на відстані dz від першого діють внутрішні зусилля $Q_y + dQ_y$ і $M_x + dM_x$. У межах нескінченно малого dz навантаження $q(z)$ можна вважати рівномірно розподіленим та рівним q.

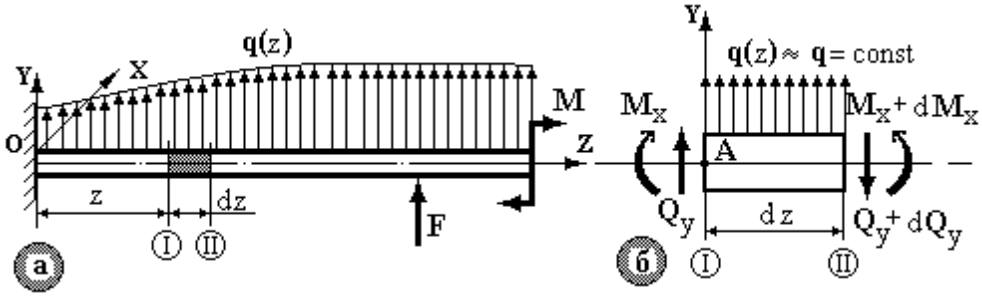


Рисунок 2.6

Оскільки балка під дією зовнішнього навантаження знаходиться в рівновазі, то і кожен її елемент під дією зовнішніх та внутрішніх зусиль також знаходиться в рівновазі (рис. 2.6 б).

Запишемо рівняння статики:

1. $\sum F_y = 0;\ Q_y - (Q_y + dQ_y) + qdz = 0,$ отже

$$q = \frac{dQ_y}{dz} \tag{2.1}$$

2. $\sum M_A = 0;$

$-M_x + q \cdot dz \cdot \frac{dz}{2} - (Q_y + dQ_y) \cdot dz + (M_x + dM_x) = 0,$ приводячи подібні члени та зневажаючи нескінченно малими другого порядку, одержимо: $-Q_y dz + dM_x = 0$, звідки:

$$Q_y = \frac{dM_x}{dz}. \tag{2.2}$$

3. Підставимо вираз (2.2) у залежність (2.1), одержимо :

$$q = \frac{dQ_y}{dz} = \frac{d^2 M_x}{dz^2}. \tag{2.3}$$

2.1.4. Приклади побудови епюр поперечних сил Q_y та згинальних моментів M_x

Приклад 1.

Розглянемо консольну балку з рівномірно розподіленим навантаженням q (рис. 2.7). Показуємо поточний переріз з координатою z, межі її зміни, записуємо функції Q_y і M_x. Рівномірно розподілене навантаження q замінюємо зосередженою силою $(q \cdot z)$, яку прикладено посередині ділянки (плече зосередженої сили 0,5·z).

$0 \le z \le \ell \Rightarrow \; Q_y(z) = q \cdot z; \; M_x(z) = -q \cdot \dfrac{z^2}{2}$. Далі обчислюємо значення Q_y і M_x: $z = 0 \Rightarrow Q_y = 0$; $M_x = 0$; $z = \ell \Rightarrow Q_y = q \cdot \ell$; $M_x = -\dfrac{q \cdot \ell^2}{2}$.

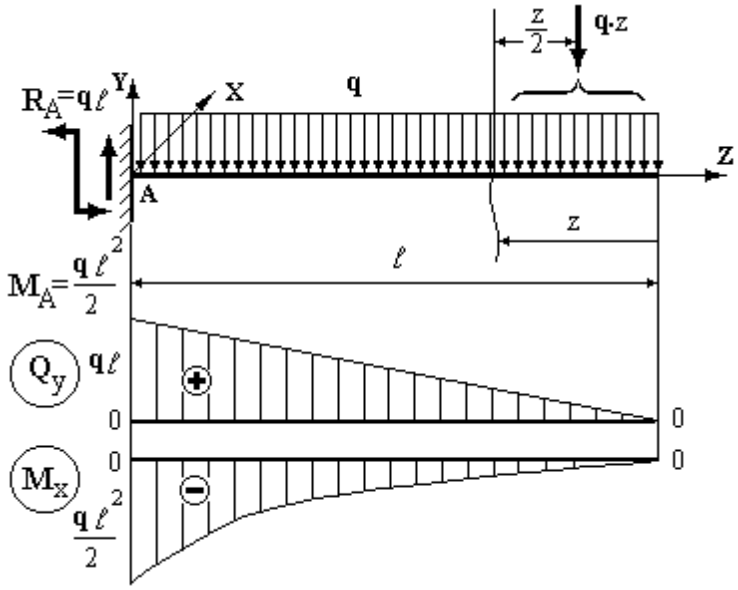


Рисунок 2.7

З побудованих епюр, використовуючи правила перевірки, визначаємо опорні реакції R_A і M_A. Реакція $R_A = q \cdot \ell$ дорівнює величині стрибка на епюрі Q_y в цьому перерізі та спрямована нагору, тому що Q_y позитивна. З умов статики $\sum F_{yi} = R_A - q \cdot \ell = 0$ одержуємо те ж саме значення $R_A = q \cdot \ell$.

На епюрі M_x в затисненні скачок моменту дорівнює $\frac{q \cdot \ell^2}{2}$, отже $M_A = \frac{q \cdot \ell^2}{2}$. Через те що M_x в затисненні негативний, то M_A повинний бути спрямований проти годинникової стрілки. З умови статики $\sum M_{Ai} = -q \cdot \ell \cdot \frac{\ell}{2} + M_A = 0$ одержуємо те ж саме значення: $M_A = \frac{q \cdot \ell^2}{2}$.

Приклад 2.

Розглянемо двохопорну однопролітну балку з рівномірно розподіленим навантаженням q (рис. 2.8).

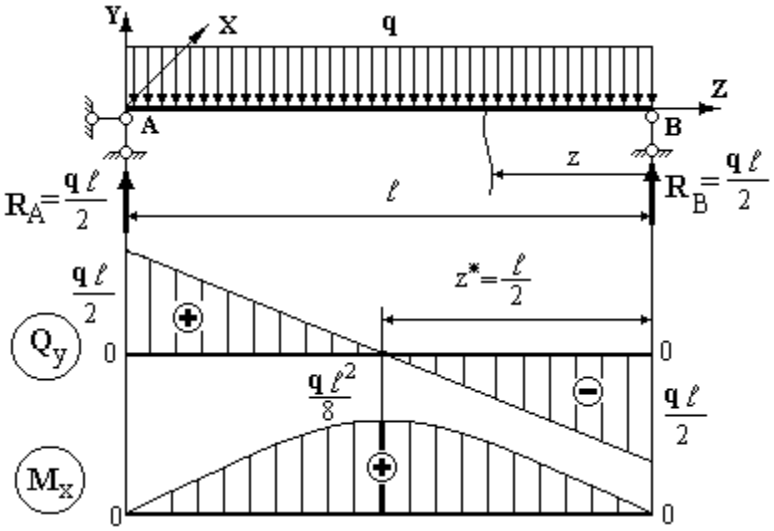


Рисунок 2.8

1. Визначаємо опорні реакції.

$$\sum M_A = 0, \quad R_B \cdot \ell - q \cdot \ell \cdot \frac{\ell}{2} = 0, \qquad \text{звідки:} \quad R_B = \frac{q \cdot \ell}{2}.$$

$$\sum M_B = 0, \quad -R_A \cdot \ell + q \cdot \ell \cdot \frac{\ell}{2} = 0, \qquad \text{звідки:} \quad R_A = \frac{q \cdot \ell}{2}.$$

Перевірка: $\sum F_{yi} \equiv 0$, $R_A + R_B - q \cdot \ell \equiv \frac{q \cdot \ell}{2} + \frac{q \cdot \ell}{2} - q \cdot \ell \equiv 0$.

Те, що реакції однакові та рівні половині зовнішнього навантаження, є наслідком симетрії задачі.

2. Показуємо поточний переріз з координатою z, межі її зміни та записуємо функції Q_y і M_x: $0 \le z \le \ell$ $\Rightarrow$

$$Q_y(z) = q \cdot z - R_B = q \cdot z - \frac{q \cdot \ell}{2};$$

$$M_x(z) = -q \cdot \frac{z^2}{2} + R_B \cdot z = -q \cdot \frac{z^2}{2} + q \cdot \frac{\ell}{2} \cdot z.$$

Далі обчислюємо значення Q_y і M_x:

$$z = 0 \Rightarrow Q_y = -\frac{q\ell}{2}, \quad M_x = 0, \; z = \ell \Rightarrow Q_y = \frac{q\ell}{2}, \quad M_x = 0.$$

Звертаємо увагу, що в точці, де $Q_y = qz^* - \frac{q\ell}{2} = 0$, згинальний момент M_x повинен мати екстремальне значення. Таким чином, при $z^* = \frac{\ell}{2}$

$$M_{x\max} = -\frac{qz^{*2}}{2} + \frac{q\ell}{2} z^* = -\frac{q\ell^2}{8} + \frac{q\ell^2}{4} = \frac{q\ell^2}{8}.$$

Приклад 3.

Розглянемо двохопорну однопролітну балку, яка симетрично навантажена двома зосередженими силами F (рис. 2.9).

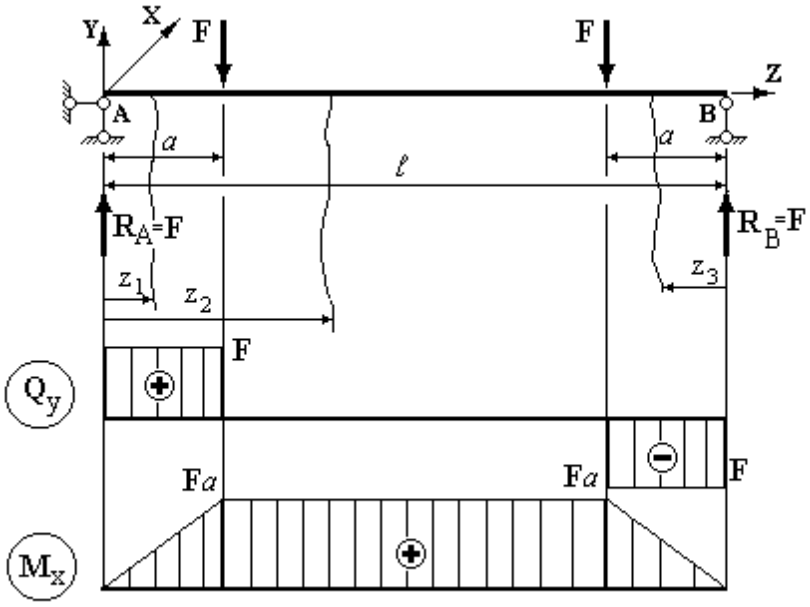


Рисунок 2.9

У зв'язку з симетрією задачі $R_A = R_B = F$. Запишемо функції і визначимо характерні значення Q_y і M_x для ділянок:

перша ділянка: $0 \le z_1 \le a \Rightarrow \quad Q_y(z_1) = R_A = F; \quad M_x(z_1) = R_A \cdot z_1;$

$$z_1 = 0 \Rightarrow M_x = 0; \quad z_1 = a \Rightarrow M_x = Fa.$$

друга ділянка: $a \le z_2 \le (\ell - a) \Rightarrow \; Q_y(z_2) = R_A - F = F - F = 0,$

$$M_x(z_2) = R_A z_2 - F(z_2 - a) = Fz_2 - Fz_2 + Fa = Fa.$$

.

Поперечна сила на ділянці дорівнює нулю, отже $M_x =$const, ділянка зазнає чисте згинання.

третя ділянка: $0 \le z_3 \le a \;\Rightarrow\; Q_y(z_3) = -R_B = -F$; $M_x(z_3) = R_B \cdot z_3;$

$$z_3 = 0 \Rightarrow M_x = 0; \quad z_3 = a \Rightarrow M_x = Fa.$$

Приклад 4.

Розглянемо двоконсольну балку (рис. 2.10).

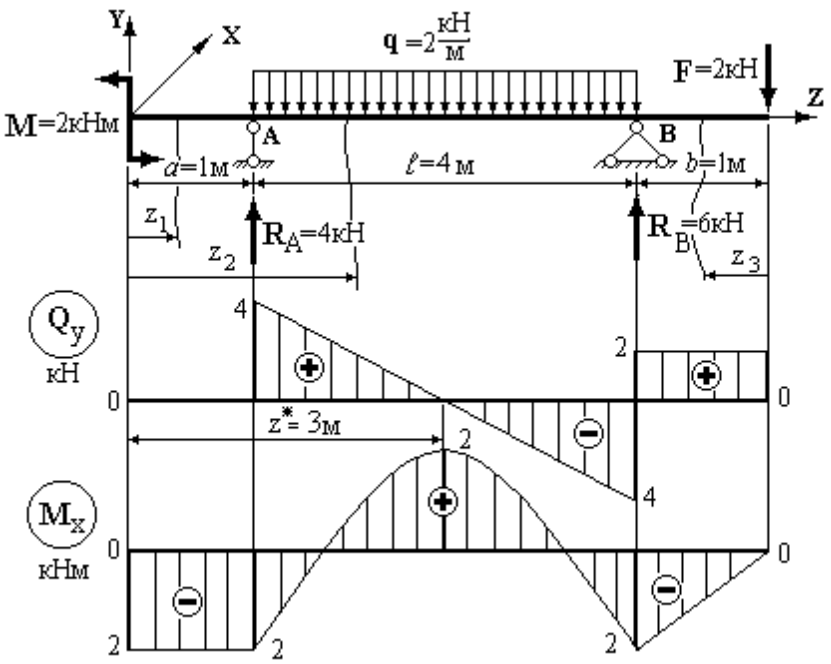


Рисунок 2.10

1. Визначаємо опорні реакції:

$\sum M_A = 0; \;\; M - q \cdot 4 \cdot 2 - F \cdot 5 + R_B \cdot 4 = 0;$ звідки $\quad R_B = 6$кН.

$\sum M_B = 0; \;\; M + q \cdot 4 \cdot 2 - F \cdot 1 - R_A \cdot 4 = 0;$ звідки $\quad R_A = 4$кН.

Перевірка: $\sum F_y = R_A + R_B - q \cdot 4 - F = 6 + 4 - 2 \cdot 4 - 2 \equiv 0.$

2. Побудуємо епюри внутрішніх зусиль. Для цього розбиваємо балку на ділянки, показуємо перерізи на кожній з них, вказуємо межі зміни координати z_i, визначаємо й обчислюємо функції Q_y і M_x.

Перша ділянка: $0 \le z_1 \le 1 \Rightarrow Q_y(z_1) = 0;\ M_x(z_1) = -M = -2$ кНм.

Друга ділянка: $1 \le z_2 \le 5 \Rightarrow Q_y(z_2) = R_A - q(z_2 - 1) = 4 - 2(z_2 - 1);$

$$M_x(z_2) = -M + R_A(z_2 - 1) - q(z_2 - 1) \cdot \frac{(z_2 - 1)}{2} =$$

$$= -2 + 4 \cdot (z_2 - 1) - 2 \cdot \frac{(z_2 - 1)^2}{2};$$

$z_2 = 1 \Rightarrow Q_y = 4$ кН; $M_x = -2$ кНм; $z_2 = 5 \Rightarrow Q_y = -4$ кН; $M_x = -2$ кНм.

На другій ділянці поперечна сила Q_y змінює знак, а згинальний момент M_x досягає максимального значення при $z_2 = z^*$. Координата z^* визначиться з умови:

$Q_y(z^*) = 4 - 2(z^* - 1) = 0,$ звідки $z^* = 3$ м,

$M_{x\,\max} = -2 + 8 - 4 = 2$ кНм.

Третя ділянка: $0 \le z_3 \le 1 \Rightarrow Q_y(z_3) = F = 2$ кН; $M_x(z_3) = -Fz_3;$

$z_3 = 0 \Rightarrow M_x = 0;\ z_3 = 1 \Rightarrow M_x = -2$ кНм.

2.1.5. Правила побудови та перевірки епюр M_x і Q_y

Вищенаведені приклади та диференціальні залежності (2.2) і (2.3) дозволяють установити закономірності розподілів поперечних сил та згинальних моментів по довжині балки.

1. На ділянках, де розподілене навантаження відсутнє ($q = 0$), епюра Q_y постійна, а епюра M_x представляє лінійну функцію (рис. 2.9).

2. На ділянках з рівномірно розподіленим навантаженням q епюра Q_y лінійна, а епюра M_x – квадратична парабола, причому опуклість парабо-ли спрямована в протилежну сторону дії розподіленого навантаження (рис. 2.7). У точці $z = z^*$, де поперечна сила $Q_y(z^*) = 0$ (змінює знак), момент M_x досягає екстремального значення ($M_{x\max}, M_{x\min}$) (рис. 2.8).

3. На ділянках, де $Q_y = 0$, епюра M_x постійна.

4. На ділянці, де поперечна сила Q_y позитивна, епюра моменту M_x зростає, і убуває – якщо Q_y негативна (у випадку руху зліва направо).

5. У перерізі, де до балки прикладена зосереджена сила F:

- на епюрі Q_y спостерігається стрибок на величину F у напрямку прикладеної сили;
- на епюрі M_x з'являється злам, причому вістря зламу спрямоване проти дії зосередженої сили.

6. У перерізах, де до балки прикладено зосереджений момент, на епюрі M_x спостерігається стрибок на величину цього моменту.

2.2. Напруження при поперечному згинанні

При прямому поперечному згинанні в перерізі виникають поперечна сила Q_y**,** що викликає деформацію зсуву і появу **дотичних напружень**, та згинальний момент M_x, що викликає деформацію згинання і **нормальні напруження** у перерізі балки.

2.2.1. Нормальні напруження при чистому згинанні

Розглянемо випадок чистого згинання, коли в перерізі виникає тільки згинальний момент. Покажемо стержень до його деформування (рис. 2.11 а) та після навантаження згинальними моментами M_x (рис. 2.11 б).

Спостерігаючи за деформацією ортогональної сітки, попередньо нанесеної на бічну поверхню балки до і після навантаження (рис. 2.11 а, рис. 2.11 б), відзначимо, що подовжні лінії при чистому згинанні викривляються по дузі кола, а контури поперечних перерізів залишаються плоскими та перетинають подовжні лінії під прямими кутами. У стиснутій області (у даному випадку внизу) волокна коротшають, а в зоні розтягання (угорі) подовжуються. Існує поздовжній шар, довжина якого при чистому згинанні залишається незмінною. Цей шар називається **нейтральним**, його радіус кривизни позначимо ρ.

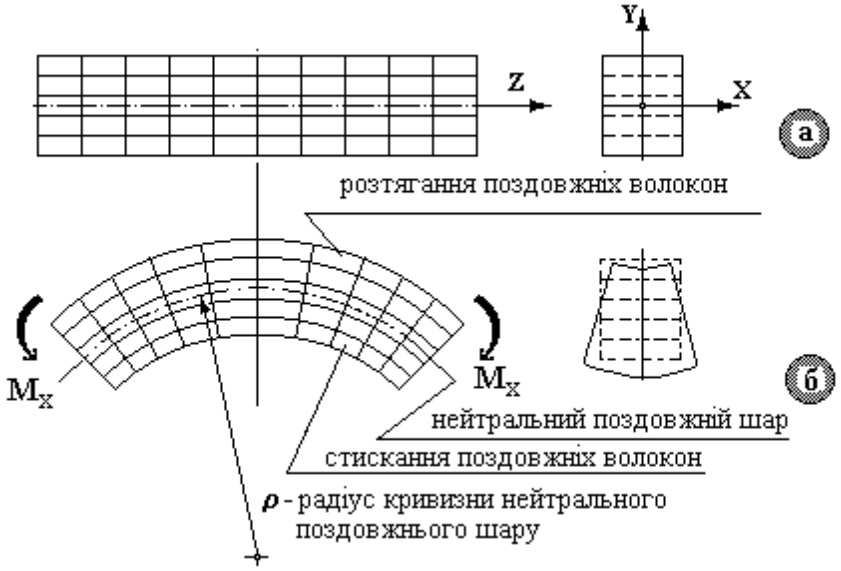


Рисунок 2.11

Поперечний переріз балки перетинається з нейтральним шаром по прямій, яка називається **нейтральною лінією** перерізу.

Відзначені обставини дозволяють ввести наступні гіпотези:

– при чистому згинанні дотримується **гіпотеза плоских перерізів**: усі поперечні перерізи стержня при чистому згинанні не викривляються, а лише повертаються один відносно одного навколо осі X;

– поздовжні волокна не тиснуть одне на одне;

– по ширині перерізу нормальні напруження не змінюються.

Логічно припустити, що в точках поперечного перерізу при чистому згинанні виникають тільки нормальні напруження, що приводять до інтегрального внутрішнього силового фактора – згинального момента M_x.

Через відсутність поперечних сил у напрямку осі Y, очевидно, що в точках перерізу дотичні напруження відсутні.

Розглянемо прямолінійний стержень довільного поперечного перерізу площею A з віссю симетрії Y при чистому згинанні (рис. 2.12 а), тоді вісь Y – головна центральна, а вісь X збігається з нейтральною лінією.

У перерізі з координатою z визначимо внутрішній згинальний момент $M_x = M$ (рис. 2.12 б). Момент M_x дорівнює сумі моментів від розподілених внутрішніх зусиль.

Задача про визначення внутрішніх зусиль відноситься до класу статично невизначених задач, тому далі застосовуємо схему рішення таких задач.

Статична сторона задачі. Із шести рівнянь статичної рівноваги три рівняння

$$\sum F_{ix} \equiv 0, \quad \sum F_{iy} \equiv 0, \quad \sum M_{iz} \equiv 0$$

виконуються тотожно.

Виділимо елемент площі dA з координатами (x, y) (рис. 2.12 в). Елементарна сила в осьовому напрямку, що діє на площадку dA дорівнює $dN = \sigma\, dA,$ а результуюча сила знайдеться як

$$N = \int_A \sigma\, dA.$$

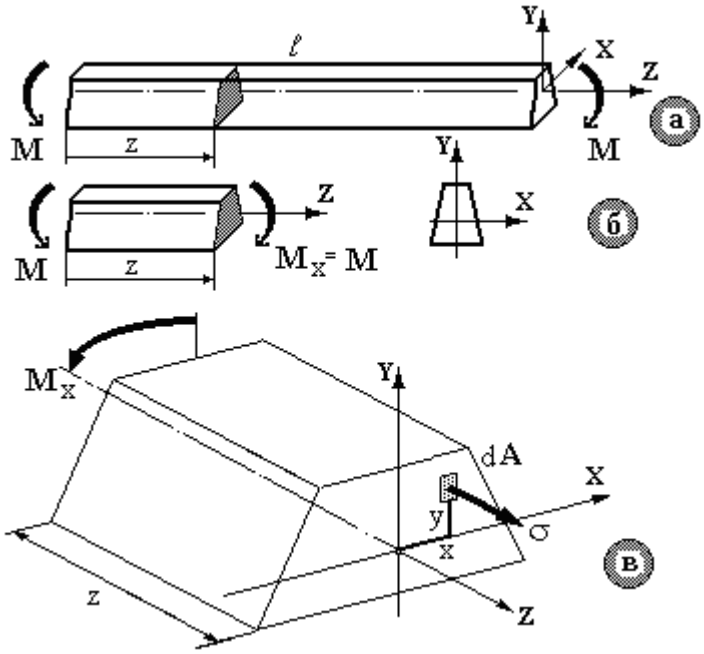


Рисунок 2.12

Елементарний момент сили dN щодо осей X і Y запишеться як $dM_x = dN \cdot y$ та $dM_y = dN \cdot x.$ Відповідно згинаючі моменти: $M_x = \int_A dN \cdot y = \int_A \sigma\, y\, dA;$ $M_y = \int_A dN \cdot x = \int_A \sigma\, x\, dA.$

Таким чином, умови статики приймуть вигляд:

$$\sum F_{iz} = 0; \qquad \int_A \sigma\, dA = 0; \tag{2.4}$$

$$\sum M_{iy} = 0; \qquad \int_A \sigma\, x\, dA = 0; \tag{2.5}$$

$$\sum M_{ix} = 0; \qquad M_x - \int_A \sigma\, y\, dA = 0. \tag{2.6}$$

Відзначимо невідомі: нормальне напруження σ (величина та закон його розподілу за висотою перерізу); радіус кривизни ρ нейтрального шару; положення нейтральної лінії в перерізі.

Геометрична сторона задачі. Розглянемо деформацію елемента довжиною dz. Нехай волокно OO_1 належить нейтральному шару. Виділимо на відстані y від нього волокно ab (рис. 2.13).

Первісна довжина волокна $\ell_0 = ab = OO_1 = \rho d\theta$, тому що волокно OO_1 не деформується. Після деформування волокно ab перетворюється на дугу a_1b_1 з радіусом кривизни ρ_1 та довжиною:

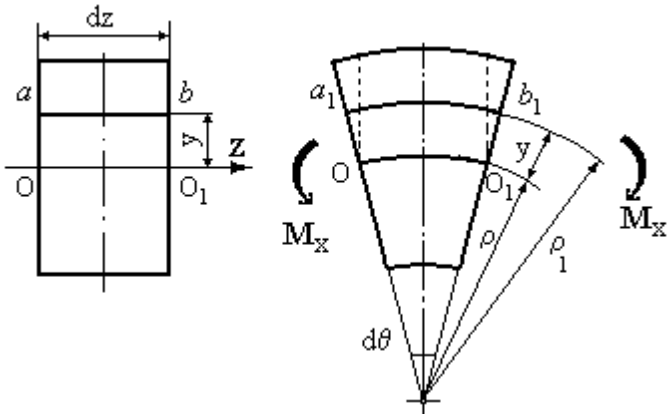


Рисунок 2.13

$$\ell_1 = \cup a_1b_1 = \rho_1 d\theta = (\rho + y)d\theta.$$

Визначимо відносну деформацію волокна ab:

$$\varepsilon_{ab} = \frac{\Delta\ell_{ab}}{\ell_0} = \frac{\ell - \ell_0}{\ell_0} = \frac{(\rho + y)d\theta - \rho d\theta}{\rho d\theta} = \frac{y}{\rho}.$$

Така залежність має місце для будь-якого волокна:

$$\varepsilon = \frac{y}{\rho}. \qquad (2.7)$$

Фізична сторона задачі. При чистому згинанні поздовжні волокна піддаються розтяганню − стисканню, тому закон Гука запишемо як

$$\sigma = E\varepsilon.$$

Після підстановки значення ε з виразу (2.7) маємо:

$$\sigma = E\frac{y}{\rho}. \qquad (2.8)$$

Підставляючи (2.8) послідовно в рівняння (2.4), (2.5), (2.6), одержимо наступне:

1. $\int\limits_A \sigma dA = \int\limits_A E\frac{y}{\rho}dA = \frac{E}{\rho}\int\limits_A ydA = \frac{E}{\rho}S_x = 0$. Таким чином, статичний момент площі $S_x = 0$, тому що модуль поздовжньої пружності E та радіус кривизни ρ є ненульовими. Отже, **нейтральна лінія при чистому згинанні проходить через центр ваги поперечного перерізу**.

2. $\int\limits_A \sigma xdA = \int\limits_A E\frac{y}{\rho}xdA = \frac{E}{\rho}\int\limits_A xydA = \frac{E}{\rho}I_{xy} = 0$. Таким чином відцентровий момент інерції I_{xy} щодо центральних осей дорівнює нулю, тому **осі *X, У*** є **головними центральними** осями інерції. При прямому згинанні **силова лінія** (вісь *Y*) **перпендикулярна нейтральної лінії** (вісь *X*).

3. $M_x - \int\limits_A \sigma ydA = M_x - \int\limits_A E\frac{y}{\rho}ydA = M_x - \frac{E}{\rho}\int\limits_A y^2dA =$

$$= M_x - \frac{E}{\rho}\cdot I_x = 0,$$

звідси кривизна нейтрального поздовжнього шару визначається виразом:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EI_x}, \qquad (2.9)$$

де $\int\limits_A y^2dA = I_x$ – осьовий момент інерції перерізу, а EI_x – **жорсткість стержня при згинанні**.

Порівнюючи значення кривизни $\frac{1}{\rho}$ з рівнянь (2.8) і (2.9) одержимо:

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{\rho}=\frac{\sigma}{Ey}\\ \frac{1}{\rho}=\frac{M_x}{EI_x}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{\sigma}{Ey}=\frac{M_x}{EI_x}.$$

Формула для визначення нормальних напружень в довільній точці перерізу набуває вигляду:

$$\sigma=\frac{M_x}{I_x}y. \qquad (2.10)$$

З отриманої формули випливає, що нормальні напруження σ по висоті перерізу змінюються лінійно. На рис. 2.14 показані розподіли нормальних напружень по висоті для різних за формою перерізів.

Максимальні напруження $\sigma_{\max}$ виникають у найбільш віддалених точках від нейтральної лінії при $y=y_{\max}$, тобто $\sigma_{\max}=\frac{M_x\cdot y_{\max}}{I_x}$.

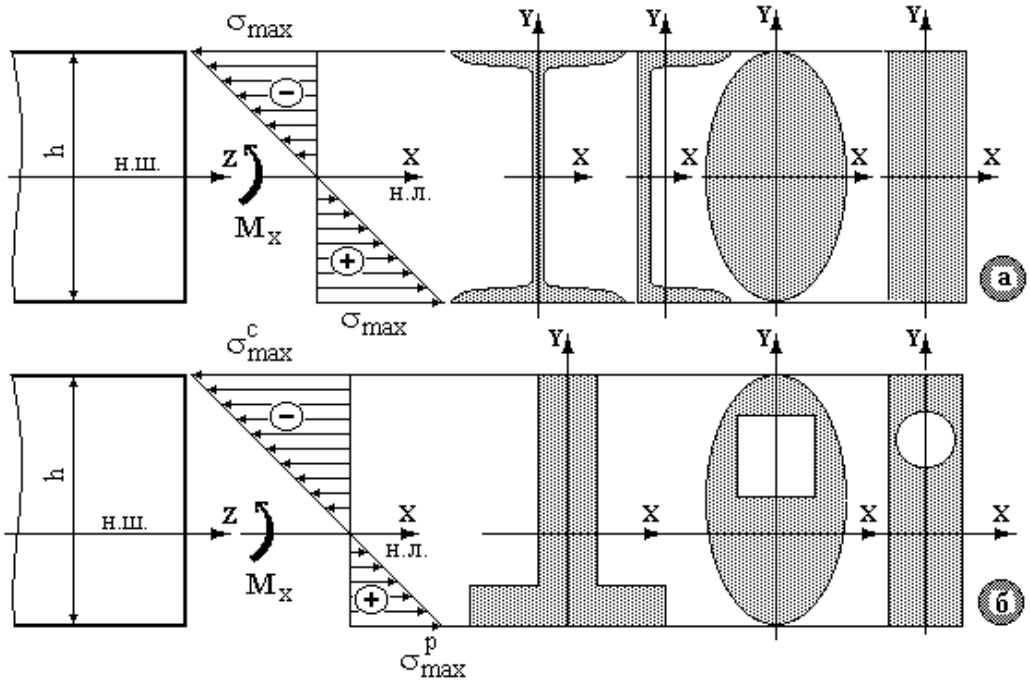


Рисунок 2.14

Умова міцності при згинанні набуває вигляду:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{x\max} \cdot y_{\max}}{I_x} \le [\sigma]. \qquad (2.11)$$

Ця умова використовується для розрахунку перерізів, що мають одну вісь симетрії (рис. 2.14 б). Для перерізів із двома осями симетрії (рис. 2.14 а), враховуючи, що $W_x = \dfrac{I_x}{y_{\max}}$ – осьовий момент опору, зручніше використовувати умову міцності при згинанні у вигляді:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{x\max}}{W_x} \le [\sigma]. \qquad (2.12)$$

Коли поперечна сила Q_y не дорівнює нулю, відбувається скривлення поперечних перерізів, і гіпотеза плоских перерізів не дотримується. Як показують дослідження, при відношенні довжини ℓ стержня до висоти h поперечного перерізу $\dfrac{\ell}{h} \ge 8$ (що має місце для більшості балок) можна вважати, що поперечний переріз практично не скривляється, тоді формула (2.10) для визначення нормальних напружень при чистому згинанні справедлива і при поперечному згинанні.

Приклад. Визначити розміри різних форм поперечних перерізів, якщо згинальний момент в перерізі $M_x = 80$ кНм, допустиме напруження при згинанні $[\sigma] = 160$ МПа.

З умови міцності (2.12) осьовий момент опору перерізу $W_x \ge \dfrac{M_{x\max}}{[\sigma]} = \dfrac{80 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 0{,}5 \cdot 10^{-3}$ м^3=500 см^3.

Далі розраховуємо геометричні параметри перерізів:

1. **Прямокутний переріз** (рис. 2.15 а), для якого повинне задаватися відношення h/b (візьмемо $h/b = 2$). Осьовий момент опору $W_x = \dfrac{bh^2}{6} = \dfrac{2}{3}b^3 = 500$ см^3, звідки $b = \sqrt[3]{750} \approx 9$ см. Висота перерізу $h = 18$ см, площа поперечного перерізу $A = bh = 2b^2 = 162$ см^2.

2. **Прямокутний переріз** з відношенням $\frac{h}{b}=\frac{1}{2}$ (рис. 2.15 б). Осьовий момент опору $W_x=\frac{bh^2}{6}=\frac{b^3}{24}=500\,\text{см}^3$, звідси

$$b=\sqrt[3]{12000}=22{,}8\,\text{см},\qquad h=11{,}4\,\text{см},\qquad A=22{,}8\cdot 11{,}4=260\,\text{см}^2.$$

3. **Круглий суцільній переріз** діаметром d (рис. 2.15 в). Осьовий момент опору $W_x=\frac{\pi d^3}{32}\approx 0{,}1d^3=500\,\text{см}^3$, звідси діаметр перерізу $d=\sqrt[3]{5000}=17{,}1\text{см}$; площа $A=\frac{\pi d^2}{4}=\frac{\pi\cdot 17{,}1^2}{4}=229\,\text{см}^2$.

4. **Кільцевий переріз** (рис. 2.15 г). Задаємо відношення діаметрів $c=\frac{d}{D}=0{,}8$. Осьовий момент опору для цього перерізу

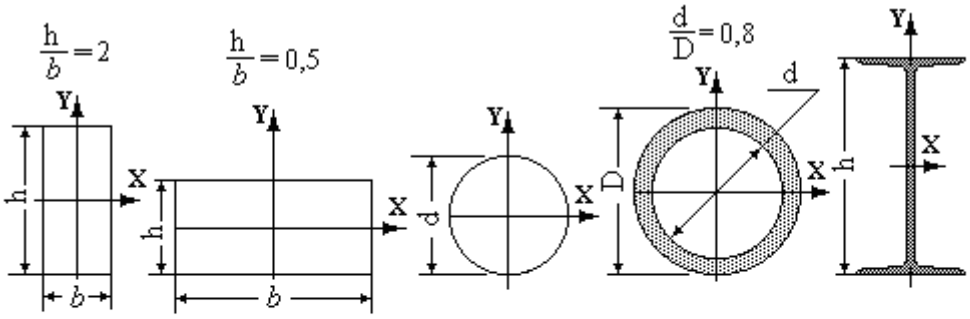
$$W_x=\frac{\pi D^3}{32}(1-c^4)\approx 0{,}1D^3(1-c^4)=500\,\text{см}^3.$$

Тоді $D=\sqrt[3]{\frac{5000}{1-0{,}8^4}}=20{,}4$ см, $d=20{,}4\cdot 0{,}8=16{,}32\,\text{см}$.

Площа перерізу $A=\frac{\pi D^2}{4}(1-c^2)=\frac{\pi\cdot 20{,}4^2}{4}(1-0{,}8^2)=115\,\text{см}^2$.

5. **Двотавровий переріз** (рис. 2.15 д). За ГОСТ 8239-89 підбираємо номер двотавра з найближчим більшим значенням осьового моменту опору до розрахункового. Так, для двотавра № 30а: $W_x=518\,\text{см}^3$, $A\approx 50\,\text{см}^2$.

Визначимо коефіцієнт перевитрати матеріалу як відношення окремих площ A_i до площі раціонального поперечного перерізу (двотавр)**.** Складемо таблицю (рис. 2.15), з якої робимо висновок, що раціональним є двотавровий переріз з найменшою витратою матеріалу.



а	б	в	г	д	
h=18см b=9см	h=11,4см b=22,8см	d=17,1см	D=20,4см d=16,32см	№30а	
162см^2	260см^2	229см^2	115см^2	50см^2	A_i
3,24	5,2	4,58	2,3	1	$\frac{A_i}{A_{min}}$

Рисунок 2.15

2.2.2. Дотичні напруження при поперечному згинанні

Дія в перерізі поперечної сили Q_y викликає дотичні напруження τ, що збігаються по напрямку з нею. Дотичні напруження по ширині перерізу не змінюються та визначаються за формулою Д.І.Журавського:

$$\tau = \frac{Q_y S_x^{\text{відс}}}{b_y \cdot I_x} \quad , \tag{2.13}$$

де Q_y − поперечна сила, що діє в перерізі; I_x − осьовий момент інерції перерізу щодо центральної осі X (нейтральної лінії); b_y − ширина перерізу на тім рівні y від нейтральної лінії, де визначаються дотичні напруження; $S_x^{\text{відс}} = A^{\text{відс}} \cdot y_c$ − абсолютне значення статичного моменту щодо центральної осі X частини перерізу, що лежить вище (чи нижче) того рівня, де визначаються дотичні напруження.

Умова міцності по дотичним напруженням при поперечному згинанні записується у вигляді:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{y\max} S_{x\ \max}^{\text{відс}}}{b_y \cdot I_x} \le [\tau] \ . \tag{2.14}$$

Таким чином, при поперечному згинанні маємо умови міцності по нормальним σ та дотичним τ напруженням. Основним вважається умова міцності по нормальним напруженням, а умова (2.14) по дотичним напруженням, як правило, перевіряється.

2.2.2.1. Розподіл дотичних напружень для прямокутного перерізу

В перерізі діють момент M_x і поперечна сила Q_y (рис. 2.16). Оскільки Q_y, ширина перерізу $b_y = b$ та осьовий момент інерції $I_x = \dfrac{bh^3}{12}$ є постійними величинами, то дотичні напруження змінюються за таким же законом, що і статичний момент відсіченої частини площі $S_x^{\text{відс}}$.

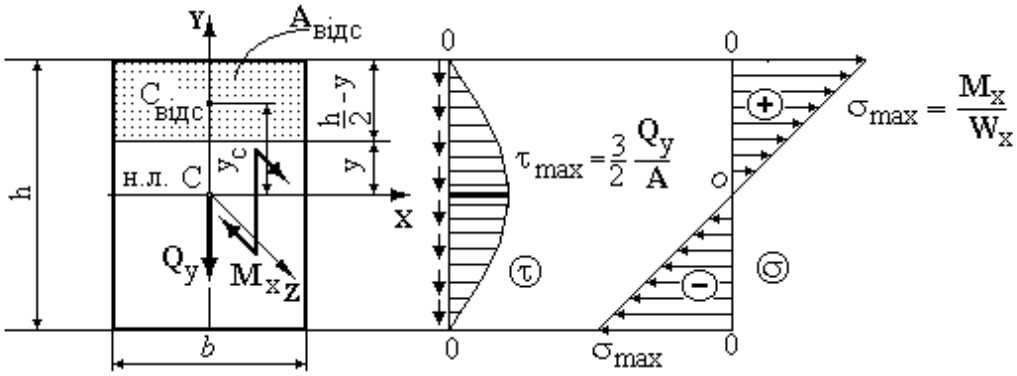


Рисунок 2.16

Визначаємо дотичні напруження на довільному рівні y. Площа відсіченої частини перерізу $A^{\text{відс}} = b \cdot \left(\dfrac{h}{2} - y\right) = \dfrac{bh}{2}\left(1 - \dfrac{2y}{h}\right)$, положення її центра ваги $y_c = \dfrac{h}{2} - \dfrac{\frac{h}{2} - y}{2} = \left(\dfrac{h}{4} + \dfrac{y}{2}\right) = \dfrac{h}{4}\left(1 + \dfrac{2y}{h}\right)$.

Статичний момент відсіченої частини площі:

$$S_x^{\text{відс}} = A^{\text{відс}} \cdot y_c = \frac{bh}{2}\left(1 - \frac{2y}{h}\right) \cdot \frac{h}{4}\left(1 + \frac{2y}{h}\right) = \frac{bh^2}{8}\left[1 - \left(\frac{2y}{h}\right)^2\right].$$

Таким чином, дотичні напруження змінюються за законом **квадратичної параболи**. **Максимальні дотичні напруження виникають на**

нейтральній лінії, де нормальні напруження σ дорівнюють нулю. Для визначення $\tau_{\max}$ необхідно обчислити статичний момент половини площі перерізу $S_x^{\text{відс}}{}_{\max} = \dfrac{bh^2}{8}$. Тоді маємо:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_y bh^2/8}{b \cdot bh^3/12} = \frac{3}{2}\frac{Q_y}{bh} = \frac{3}{2}\frac{Q_y}{A}.$$

2.2.2.2. Розподіл дотичних напружень для двотаврового перерізу

В перерізі діють згинальний момент M_x та поперечна сила Q_y (рис. 2.17). Використовуючи вираз (2.13) для дотичних напружень, визначимо їхні значення в характерних точках перерізу. З достатнім ступенем точності можна замінити реальну форму полиці і стінки на прямокутники.

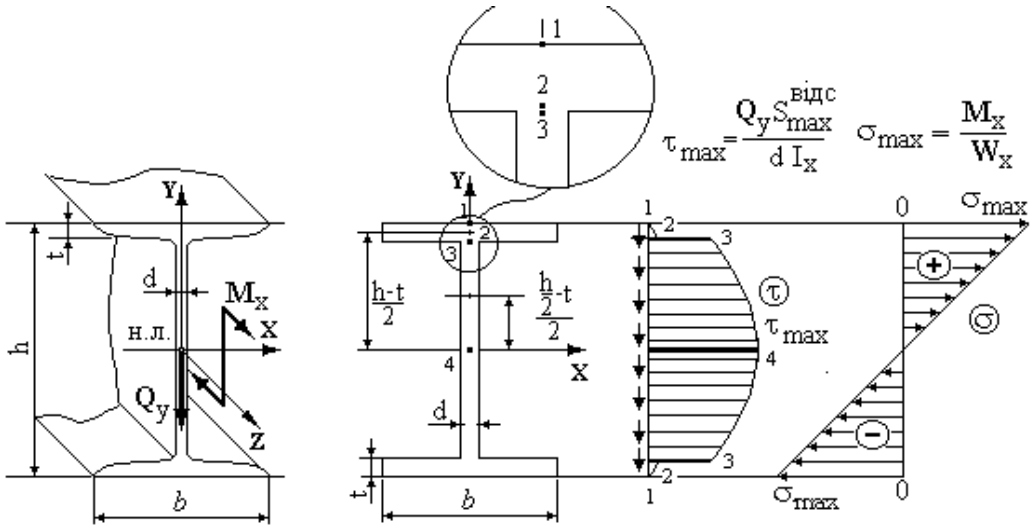


Рисунок 2.17

Точка 1: $\tau_1 = 0$, тому що $S_x^{\text{відс}} = 0$ (вище рівня 1 відсічена площа відсутня).

Точки 2, 3. Ці точки мають однакову координату y, але належать полиці та стінці одночасно, тобто різній ширині $b_2=b$; $b_3=d$. Тому **в місці переходу полки в стінку виникає скачок дотичних напружень.**

Точка 2 (приналежна полиці):

$$\tau_2 = \frac{Q_y}{b \cdot I_x} bt\left(\frac{h-t}{2}\right) = \frac{Q_y t}{I_x}\left(\frac{h-t}{2}\right).$$

Точка 3 (приналежна стінці):

$$\tau_3 = \frac{Q_y}{d \cdot I_x} bt\left(\frac{h-t}{2}\right).$$

Точка 4:

$$\tau_4 = \frac{Q_y}{bI_x}\left[bt\left(\frac{h-t}{2}\right) + d\left(\frac{h}{2}-t\right)\cdot\left(\frac{\frac{h}{2}-t}{2}\right)\right] = \frac{Q_y S_{x\max}^{\text{відс}}}{d \cdot I_x}.$$

$S_{x\max}^{\text{відс}}$ – статичний момент щодо центральної осі половини площі перерізу (для стандартних профілів приведений у таблицях сортаменту). Графік розподілу дотичних напружень приведено на рис. 2.17.

2.2.3. Порядок виконання проектувального розрахунку при згинанні

1. З умови міцності по нормальним напруженням визначаємо осьовий момент опору поперечного перерізу, тобто $W_x \geq \frac{M_{x\max}}{[\sigma]}$, та проектуємо переріз.

2. Перевіряємо переріз по дотичним напруженням. Якщо $\tau_{\max} \leq [\tau]$, то розрахунок закінчений. Якщо $\tau_{\max} > [\tau]$ (перевищення більш 5%), то розміри перерізу визначаються з умови міцності по дотичним напруженням.

Приклад 1. Визначити розміри двотаврового поперечного перерізу балки (рис. 2.18), якщо допустиме нормальне напруження $[\sigma] = 150$ МПа, дотичне – $[\tau] = 100$ МПа.

1. Визначаємо реакції:

$\sum M_A = Fa + F(\ell + a) - R_B\ell = 0,\qquad R_B = 45$кН;

$\sum M_B = F(\ell + a) + Fa - R_A\ell = 0,\qquad R_A = 45$кН.

Перевірка: $\sum F_y = -F + F + R_A - R_B \equiv 0.$

2. Розбиваємо балку на три ділянки та записуємо для поточного перерізу на кожній ділянці вирази для Q_y і M_x:

$0 \le z_1 \le a$; $Q_y = -F = 30$кН; $M_x = -F \cdot z_1$;

$0 \le z_2 \le \ell$; $Q_y = -F + R_A = 15$кН;

$M_x = -F(z_2 + a) + R_A \cdot z_2$;

$0 \le z_3 \le a$; $Q_y = -F = -30$кН; $M_x = -F \cdot z_3$.

Обчислюємо Q_y і M_x в характерних перерізах та будуємо епюри.

3. З побудованих епюр видно, що небезпечними є перерізи на обох опорах (де $M_{x\max}$=24 кНм), та будь-який переріз на консолях (де $Q_{y\max}$=30 кН).

4. З умови міцності по нормальним напруженням визначаємо осьовий момент опору: $W_x \ge \dfrac{M_{x\max}}{[\sigma]} = \dfrac{24 \cdot 10^3}{150 \cdot 10^6} = 0{,}16 \cdot 10^{-3}$м^3 = 160см^3.

По таблицях ГОСТ 8239−89 обираємо двотавр №18а, для якого $W_x = 159$см^3, що незначно менше розрахункового значення.

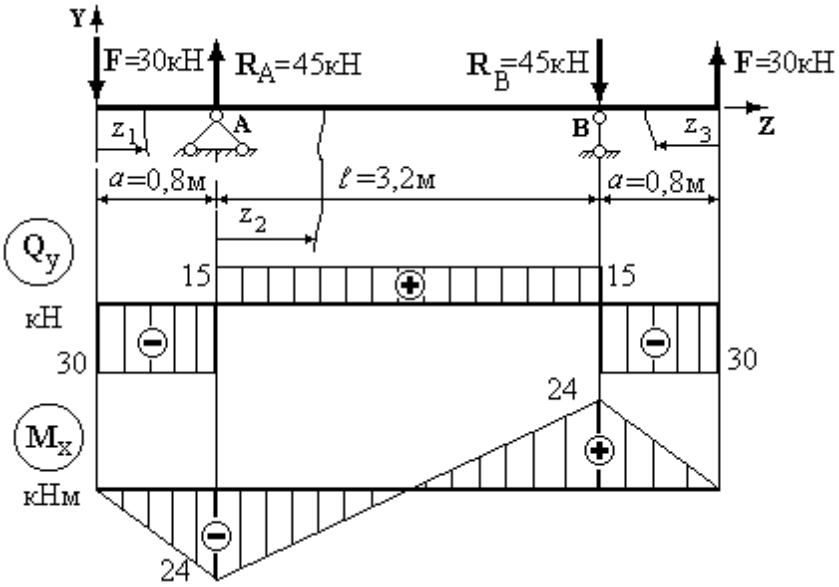


Рисунок 2.18

Інші необхідні для розрахунку параметри двотавру: $A = 25{,}4$см^2, $I_x = 1430$см^4; $d = 5{,}1$мм, $S_{x\max}^{\text{відс}} = 89{,}8$ см^3.

5. Перевіряємо виконання умови міцності по дотичним напруженням:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_y S_{x\max}^{\text{відс}}}{d \cdot I_x} = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 89{,}8 \cdot 10^{-6}}{5{,}1 \cdot 10^{-3} \cdot 1430 \cdot 10^{-8}} = 36{,}9 \cdot 10^6 \text{ Па} = 36{,}9 \text{ МПа} < [\tau].$$

Умова міцності виконується і розрахунок закінчено.

Приклад 2. Для даної схеми навантаження дерев'яної балки перекриття (рис. 2.19) визначити розміри прямокутного перерізу, якщо відношення сторін прямокутника $\frac{h}{b} = 2$; допустиме нормальне напруження $[\sigma] = 10$ МПа, дотичне $[\tau] = 2{,}5$ МПа. Оскільки навантаження симетричне, опорні реакції однакові і дорівнюють половині зовнішнього навантаження, тобто $R_A = R_B = 40$ кН.

1. Визначаємо поперечні сили та згинальні моменти по ділянкам.

Перша ділянка: $0 \le z_1 \le a$; $\Rightarrow$ $Q_y = -F = -40$ кН; $M_x = -F \cdot z_1$.

Друга ділянка: $0 \le z_2 \le \ell$; $\Rightarrow$ $Q_y = -F + R_A = 0$; $M_x = R_A \cdot z_2 -$

$- F \cdot (z_2 + a) = -40z_2 - 40 \cdot a + 40z_2 = -40 \cdot a = -4$ кНм.

Третя ділянка: $0 \le z_3 \le a$; $\Rightarrow$ $Q_y = F = 40$ кН; $M_x = -F \cdot z_3$.

З епюр (рис. 2.9) видно, що небезпечними є перерізи на обох опорах, де Q_y та M_x одночасно приймають максимальні значення

($Q_{y\max} = 40$ кН, $M_{x\max} = 4$ кНм).

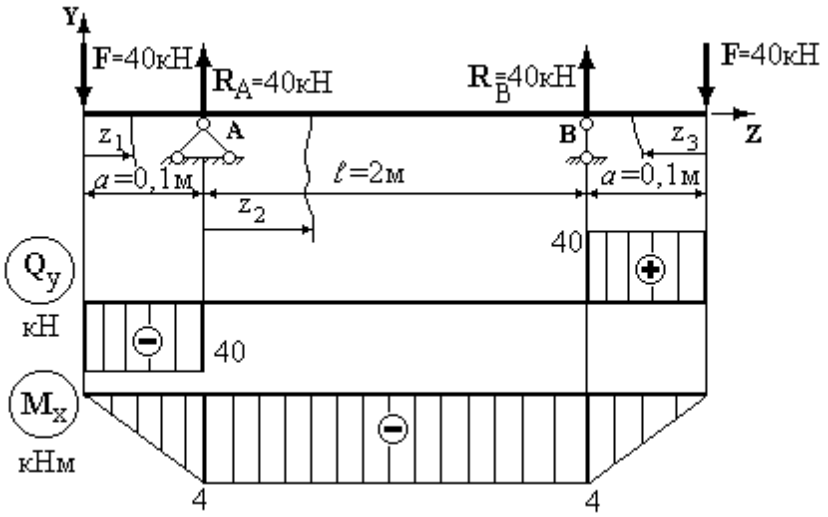


Рисунок 2.19

2. З умови міцності по нормальним напруженням знаходимо осьовий момент опору перерізу:

$$W_x \geq \frac{M_{x\max}}{[\sigma]} = \frac{4 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^6} = 0{,}4 \cdot 10^{-3}\,\text{м}^3 = 400\ \text{см}^3.$$

Як відомо, для прямокутника $W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{2}{3}b^3 = 400\,\text{см}^3$,

звідки обчислюємо розміри його сторін та площу:

$$\text{b} = \sqrt[3]{\frac{3}{2} \cdot 400} = 8{,}4\,\text{см}, \quad h = 2b = 16{,}8\,\text{см},$$

$$A = bh = 2b^2 = 2 \cdot 8{,}4^2 = 142\,\text{см}^2$$

3. Перевіримо виконання умови міцності по дотичним напруженням. Максимальне дотичне напруження для прямокутного перерізу дорівнює: $\tau_{\max} = \frac{3}{2}\frac{Q_{y\max}}{A} = \frac{3 \cdot 40 \cdot 10^3}{2 \cdot 142 \cdot 10^{-4}} = 4{,}22 \cdot 10^6\,\text{Па} = 4{,}22$ МПа , що перевищує допустиме напруження $[\tau]$=2,5МПа – умова міцності не виконується.

Визначаємо розміри поперечного перерізу з умови міцності по дотичним напруженням: $\tau_{\max} = \frac{3}{2}\frac{Q_{y\max}}{A} \leq [\tau]$, звідки знаходимо площу поперечного перерізу: $A = \frac{3Q_{y\max}}{2[\tau]} = \frac{3 \cdot 40 \cdot 10^3}{2 \cdot 2{,}5 \cdot 10^6} = 24 \cdot 10^{-3}\,\text{м}^2 = 240\ \text{см}^2$.

Площа $A = bh = 2b^2 = 240\,\text{см}^2$, звідки ширина перерізу: $\text{b} = \sqrt{120} \approx 11\,\text{см}$, а висота $h = 22\,\text{см}$. Таким чином, умова міцності по дотичним напруженням виявилась більш строгою, тому остаточно обираємо такі сторони прямокутника: $h = 22\,\text{см}$, $\text{b} = 11$ см.

2.3. Розрахунково-проектувальне завдання

Для засвоєння матеріалу розділу «Згинання прямолінійних стержнів» студенти повинні виконати навчальне завдання. Для цього необхідно:

– вивчити теоретичний матеріал відповідного розділу курсу;

– проаналізувати вихідні дані і постановку задачі і намітити план її виконання;

– намалювати схему балки, записати необхідні для рішення задачі формули і рівняння (рівняння статичної рівноваги і т.д.).

– оформити задачу в чернетці і, у разі потреби, проконсультуватися у викладача.

Розрахунки необхідно робити в загальному виді з проміжними викладеннями в звичайних чи десяткових дробах, зберігаючи усюди дві значущі цифри.

Для побудови епюр внутрішніх силових факторів, напружень і переміщень необхідно правильно вибрати масштаб по координатних осях, проставити позначення відповідного параметра і його розмірність, а потім по необхідному числу крапок побудувати графік.

Завдання підлягає заліку при виконанні наступних умов:

– здано чистовий варіант розрахунково-проектувального завдання і дані правильні відповіді на контрольні питання;

– вирішено контрольні задачі на консультаціях.

2.3.1. Склад та порядок виконання розрахунково-проектувального завдання

Студенти повинні виконати чотири розрахункові задачі.

Схеми навантаження балок наведені в додатку 2.1, а величини зовнішніх сил та геометричні розміри балок, межа текучості матеріалу балки $\sigma_{\text{т}}$, коефіцієнт запасу міцності $n_{\text{т}}$ − у додатку 2.2.

При виконанні завдання необхідно:

1. Побудувати епюри внутрішніх поперечних сил і згинальних моментів до усіх розрахункових схем балок.

2. Для четвертої розрахункової схеми підібрати згідно з умовою міцності за нормальними напруженнями ряд простих перерізів та зробити порівняльний аналіз ступеня їх раціональності.

План розв′язання

1) Відповідно до заданого варіанта накреслити розрахункові схеми балок разом з їх навантаженням, додержуючись певного масштабу.

2) Для кожної балки визначити опорні реакції, скласти вирази і підрахувати внутрішні зусилля Q_y і M_x на усіх ділянках, накреслити їх епюри та перевірити відповідність епюр до диференціальних співвідношеннь між силовими факторами при згині.

3) Для кожної балки знайти небезпечний переріз (де діє максимальний за модулем згинальний момент $M_{x\max}$).

4) Обчислити допустиме напруження $[\sigma] = \dfrac{\sigma_{\text{т}}}{n_{\text{т}}}$.

5) Для розрахункової схеми балки № 4 визначити осьовий момент опору перерізу W_x з умови міцності по нормальним напруженням та підібрати розміри наступних перерізів (див. рис. 2.15):

− прямокутника із співвідношенням сторін $h/b = 2$;

− прямокутника із співвідношенням сторін $h/b = 0{,}5$;

− кола;

− кільця, у якому $c = d/D = 0.8$;

− двотавра.

6) Обчислити площу перерізів. Одержані результати подати у вигляді таблиці.

Для двотаврової балки побудувати епюри розподілу нормальних і дотичних напружень у небезпечних перерізах з максимальними значеннями внутрішніх зусиль.

2.3.2. Приклад виконання завдання

2.3.2.1. Послідовність виконання завдання

Будуємо епюри внутрішніх силових факторів для чотирьох балок свого варіанту завдання. Визначаємо небезпечний переріз, в якому діє максимальний за модулем внутрішній момент згину $M_{x\max}$.

Умова міцності за нормальними напруженнями для перерізів, які симетричні відносно нейтральної лінії має вигляд:

$$\sigma = \frac{M_{x\max}}{W_x} \le [\sigma].$$

Звідси знаходимо осьовий момент опору перерізу:

$$W_x \ge \frac{M_{x\max}}{[\sigma]},$$

де допустиме напруження визначається за формулою: $[\sigma] = \dfrac{\sigma_{\text{т}}}{n_{\text{т}}}$.

Підбір необхідних розмірів перерізів балки виконується таким чином:

– для двотавра номер профілю визначається з порівняння знайденого моменту опору із даними сортаменту (ГОСТ 8239-89)

– для прямокутника осьовий момент опору визначається за розмірами сторін h та b: $W_x = \frac{bh^2}{6}$, де h – бік прямокутника, перпендикулярний нейтральній осі *X*.

Позначимо $h/b = k$, (k =2; 0,5), тоді $b = h/k$ і $W_x = h^3/6k$ звідки $h = \sqrt[3]{6kW_x}$, а площа перерізу дорівнює $A = b \cdot h$;

– для кола $W_x = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0{,}1d^3$, тоді $d = \sqrt[3]{10 \cdot W_x}$, а площа перерізу $A = \pi \cdot d^2/4$.

– для кільця $W_x = \frac{\pi D^3}{32}\left(1 - c^4\right) \approx 0{,}1D^3\left(1 - c^4\right)$, де $c = d/D$; *d, D* – внутрішній і зовнішній діаметри кільця відповідно. Площа кільця $A = \frac{\pi D^2}{4}\left(1 - c^2\right)$.

Графіки розподілу нормальних і дотичних напружень треба збудувати тільки для балки двотаврового перерізу. Епюри нормальних напружень σ визначити у перерізі, де діє $M_{x\max}$, а розподіл дотичних напружень τ знайти для перерізу з максимальною за модулем поперечною силою $Q_{y\max}$. На епюрі σ зазначити зони розтягу та стиску, а на епюрі τ – напрям вектора дотичних напружень.

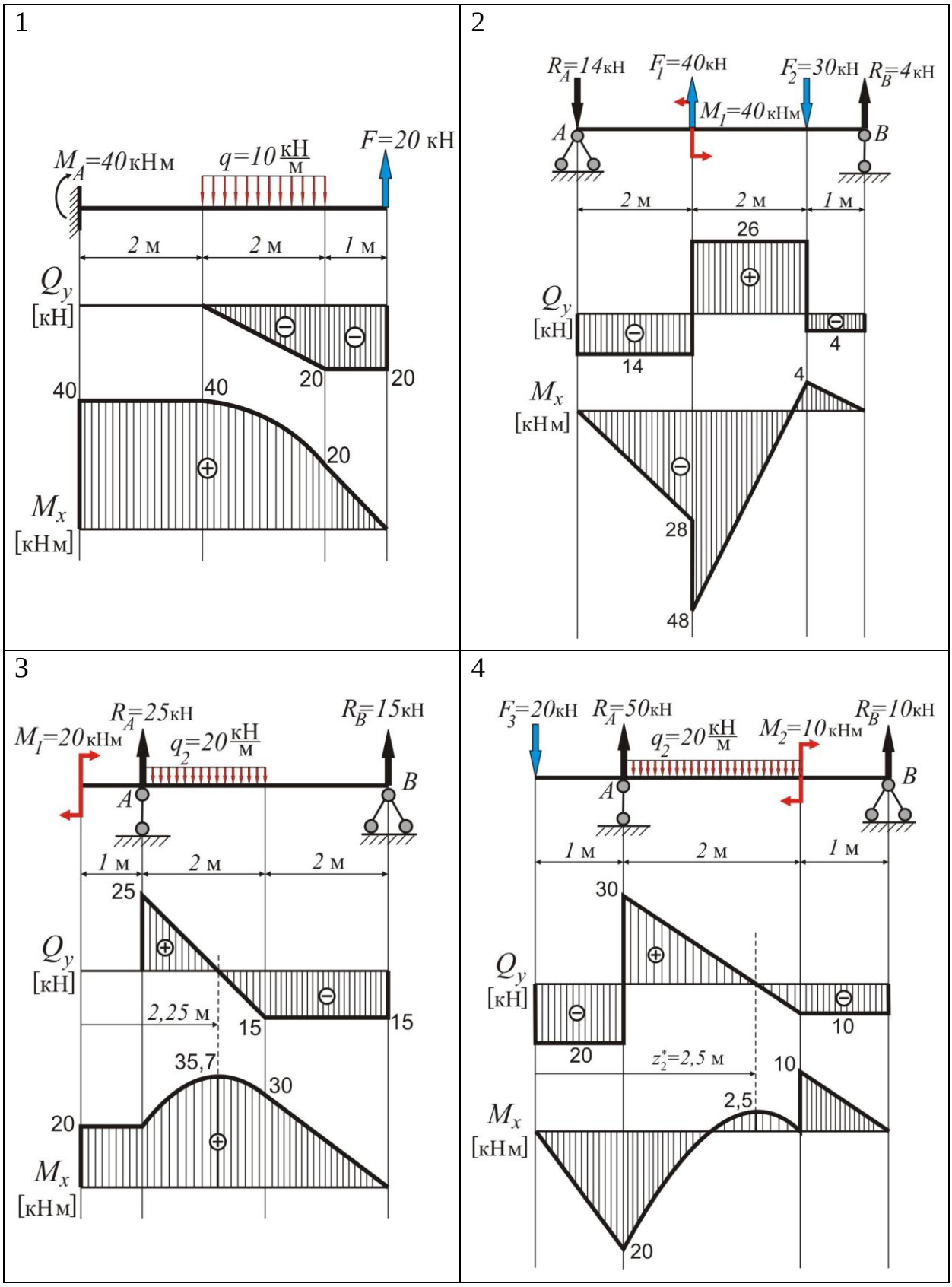
Підрахунок дотичних напружень провести за формулою Д.І.Журавського (2.13). Визначити дотичні напруження в характерних точках перерізу:

– найбільш віддалених від нейтральної осі;

– що лежать на стику полки двотавра зі стінкою;

– що лежать на нейтральній осі перерізу.

2.3.2.2. Зразок виконання завдання



Розрахунок на міцність балки 4:

1. Визначення реакцій опор:

$$\sum M_A = 0;\quad F_3 \cdot 1 - q_2 \cdot 2 \cdot 1 - M_2 + R_B \cdot 3 = 0;$$

$$R_B = (-20 \cdot 1 + 20 \cdot 2 \cdot 1 + 10)/3 = 10 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0;\quad F_3 \cdot 4 - R_A \cdot 3 + q_2 \cdot 2 \cdot 2 - M_2 = 0;$$

$$R_A = (20 \cdot 4 + 20 \cdot 2 \cdot 2 - 10)/3 = 50 \text{ кН}.$$

Перевірка:

$$\sum F_{iy} = 0;\quad R_A + R_B - F_3 - q_2 \cdot 2 = 0;\quad 50 + 10 - 20 - 20 \cdot 2 = 0.$$

2. Визначення поперечних зусиль Q_y та моментів згину M_x:

$0 \le z_1 \le 1\text{м}$ $\quad Q_y(z_1) = -F_3 = -20 \text{ кН};\quad M_x(z_1) = -F_3 z_1;$

$$M_{x|z_1=0} = 0;\quad M_{x|z_1=1\text{м}} = -20 \text{ кНм};$$

$1\text{м} \le z_2 \le 3\text{м}$ $\quad Q_y(z_2) = -F_3 + R_A - q_2(z_2 - 1);$

$$Q_{y|z_2=1\text{м}} = -20 + 50 = 30 \text{ кН};\quad Q_{y|z_2=3\text{м}} = -20 + 50 - 20 \cdot 2 = -10 \text{ кН};$$

$$M_x(z_2) = -F_3 z_2 + R_A(z_2 - 1) - \frac{q_2(z_2 - 1)^2}{2};$$

$$M_{x|z_2=1\text{м}} = -20 \cdot 1 = -20 \text{ кНм};\quad M_{x|z_2=3\text{м}} = -20 \cdot 3 + 50 \cdot 2 - 20\frac{2^2}{2} = 0;$$

$$M_x'(z_2) = Q_y(z_2) = -F_3 + R_A - q_2(z_2^* - 1) = 0;$$

$$z_2^* = (-F_3 + R_A + q_2 \cdot 1)/q_2 = 2{,}5 \text{ м};$$

$$M_{x|z_2=2{,}5\text{м}} = -20 \cdot 2{,}5 + 50 \cdot 1{,}5 - 20\frac{1.5^2}{2} = 2{,}5 \text{ кНм};$$

$0 \le z_3 \le 1\text{м}$ $\quad Q_y(z_3) = -R_B = -10 \text{ кН};\quad M_x(z_3) = R_B \cdot z_3;$

$$M_{x|z_3=0} = 0;\quad M_{x|z_3=1\text{м}} = 10 \text{ кНм}.$$

3. Підбір перерізів з умови міцності:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{x\max}}{W_X} \le [\sigma];\quad W_x \ge \frac{M_{x\max}}{[\sigma]};\quad [\sigma] = \frac{\sigma_\text{т}}{n_\text{т}} = \frac{300}{1{,}5} = 200 \text{ МПа};$$

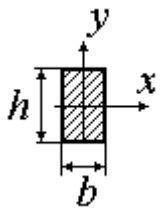
$$W_x \geq \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 10^6}{200 \cdot 10^6} = 100 \text{ см}^3.$$

Для двотавра згідно з додатком 4 приймаємо I №16:

$I_x = 873$ см^4, $W_x = 109$ см^3, $A = 20{,}2$ см^2,

$S_{x\max} = 62{,}3$ см^3, $h = 16$ см, $d = 5$ мм, $t = 7{,}8$ мм, $b = 81$ мм.

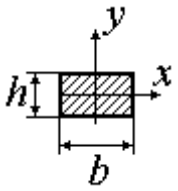
Як відомо, для прямокутного перерізу $W_x = \dfrac{bh^2}{6}$, тоді



при відношенні сторін прямокутника

$$\frac{h}{b} = 2, \qquad W_x = \frac{\frac{h}{2} \cdot h^2}{6} = 100 \text{ см}^3,$$

$$h = \sqrt[3]{12 \cdot 100} = 10{,}6 \text{ см}, \quad b = 5{,}3 \text{ см}, \; A = b \times h = 56 \text{ см}^2.$$

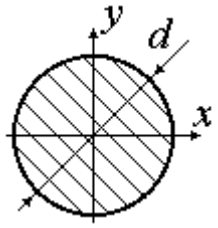


Для прямокутника з відношенням сторін

$$\frac{h}{b} = \frac{1}{2}, \quad W_x = \frac{2h \cdot h^2}{6} = 100 \text{ см}^3,$$

$$h = \sqrt[3]{3 \cdot 100} = 6{,}7 \text{ см}, \quad b = 13{,}4 \text{ см},$$

$$A = b \times h = 90 \text{ см}^2.$$

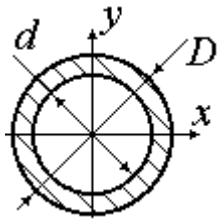


Для круга

$$W_x = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0{,}1 d^3 = 100 \text{ см}^3,$$

$$d = \sqrt[3]{10 \cdot 100} = 10 \text{ см},$$

$$A = \pi d^2 / 4 = 78{,}5 \text{ см}^2.$$



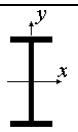
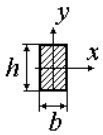
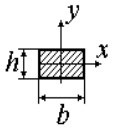
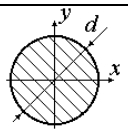
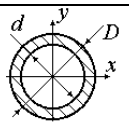
Для кільця

$$W_x = \frac{\pi \cdot D^3}{32}(1-c^4) \approx 0{,}1 \cdot D^3(1-c^4) = 100 \text{ см}^3,$$

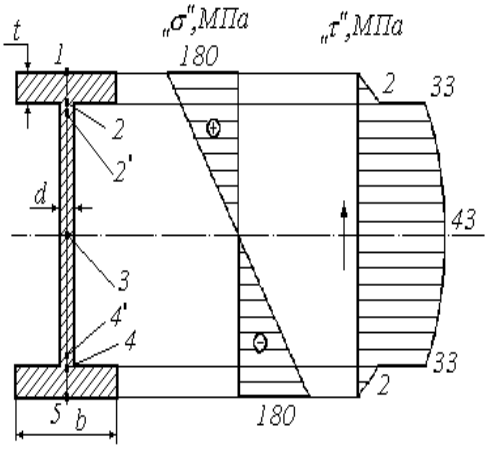
$$D = \sqrt[3]{\frac{10 \cdot 100}{(1-0{,}8^4)}} = 12 \text{ см}, \; d = c \cdot D = 0{,}8 \cdot 12 = 9{,}6 \text{ см},$$

$$A = \frac{\pi D^2}{4}\left(1-c^2\right) = 40 \text{ см}^2.$$

Зробимо порівняльний аналіз перерізів:

					
A_i,см^2	20,2	56	90	78,5	40
$A_i/A_{\min}$	1	2,8	4,5	3,9	2

4. Визначимо нормальні та дотичні напруження у двотаврі



$$\sigma_{\max} = \frac{20 \cdot 10^3}{109 \cdot 10^{-6} \cdot 10^6} = 180 \text{ МПа};$$

$$\tau = \frac{Q_y \cdot S_y^{\text{отс}}}{b \cdot I_x}; \quad \tau_{1,5} = 0; \quad S_{y(2)}^{\text{отс}} = bt\frac{h-t}{2};$$

$$\tau_{2,4} = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 81 \cdot 10^{-3} \cdot 7{,}8 \cdot 10^{-3} \cdot 7{,}61 \cdot 10^{-2}}{81 \cdot 10^{-3} \cdot 873 \cdot 10^{-8} \cdot 10^6} =$$

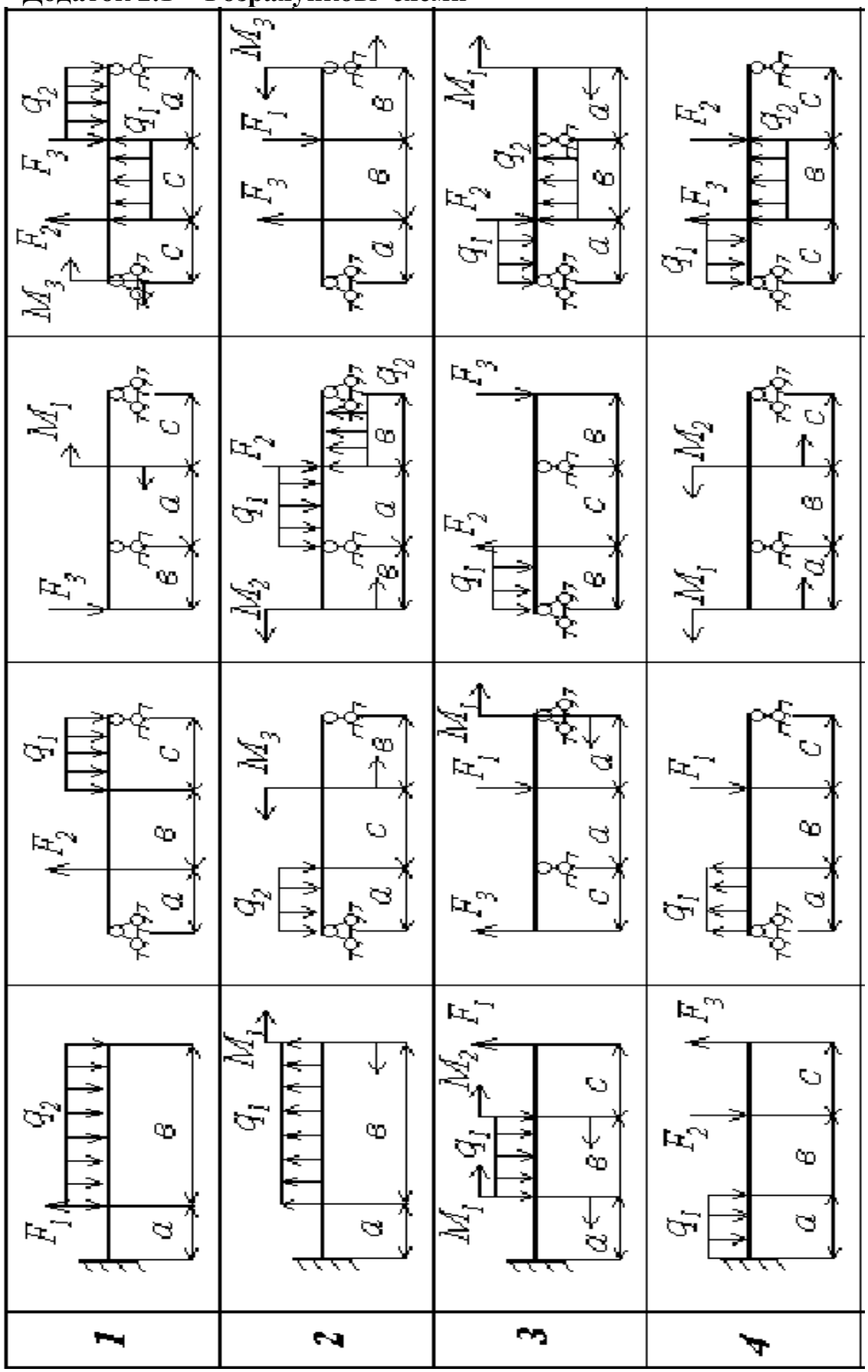
$$= 2 \text{ МПа};$$

$$\tau_{2',4'} = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 81 \cdot 10^{-3} \cdot 7{,}8 \cdot 10^{-3} \cdot 7{,}61 \cdot 10^{-2}}{5 \cdot 10^{-3} \cdot 873 \cdot 10^{-8} \cdot 10^6} =$$

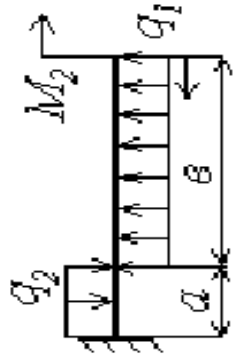
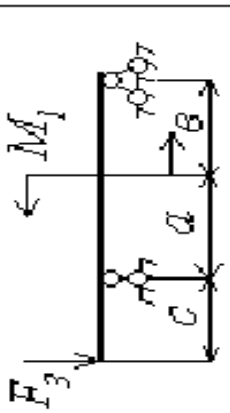
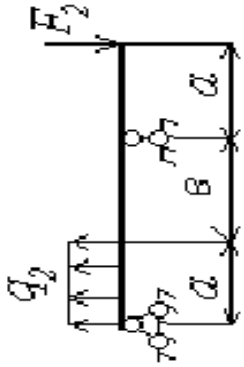
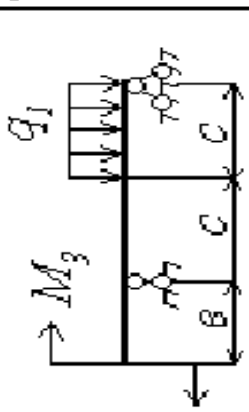
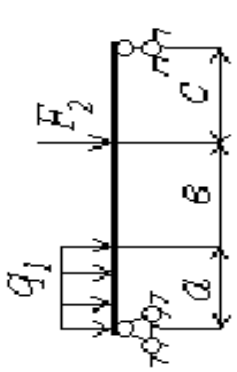
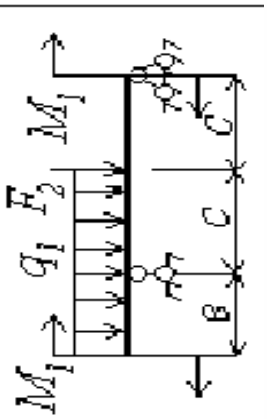
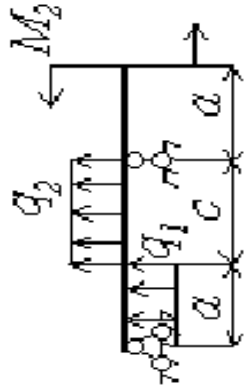
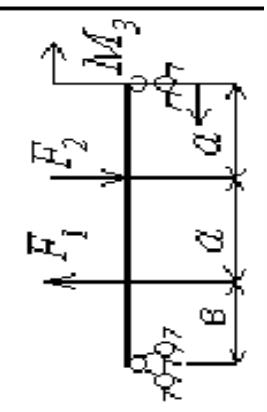
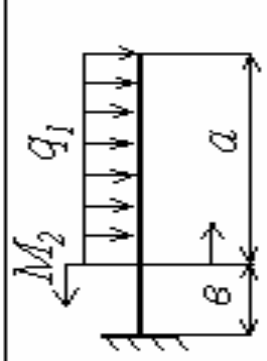
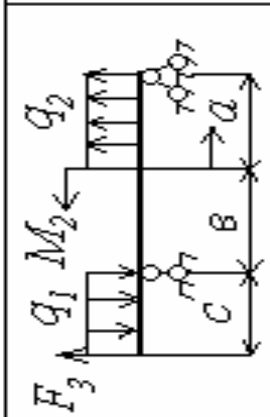
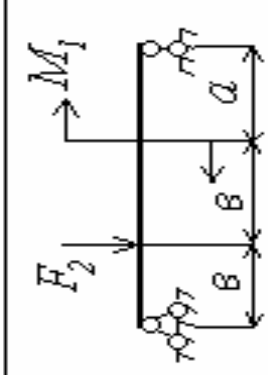
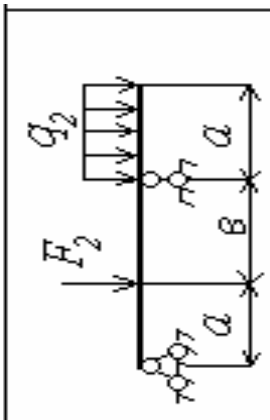
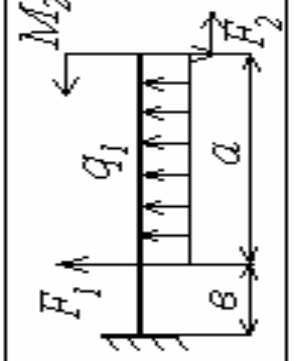
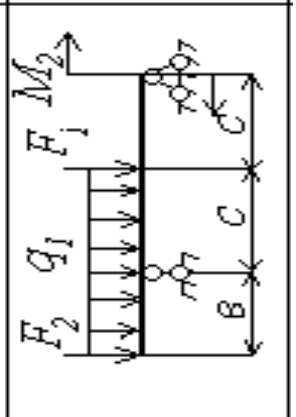
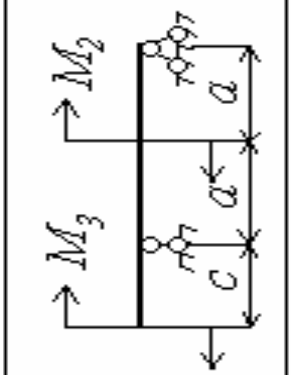
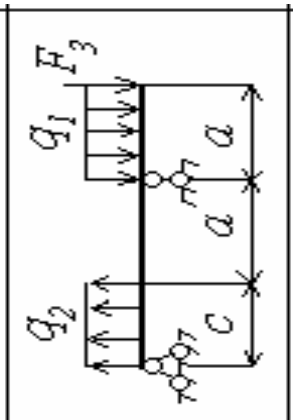
$$= 33 \text{ МПа};$$

$$\tau_3 = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 62{,}3 \cdot 10^{-6}}{5 \cdot 10^{-3} \cdot 873 \cdot 10^{-8} \cdot 10^6} = 43 \text{ МПа}.$$

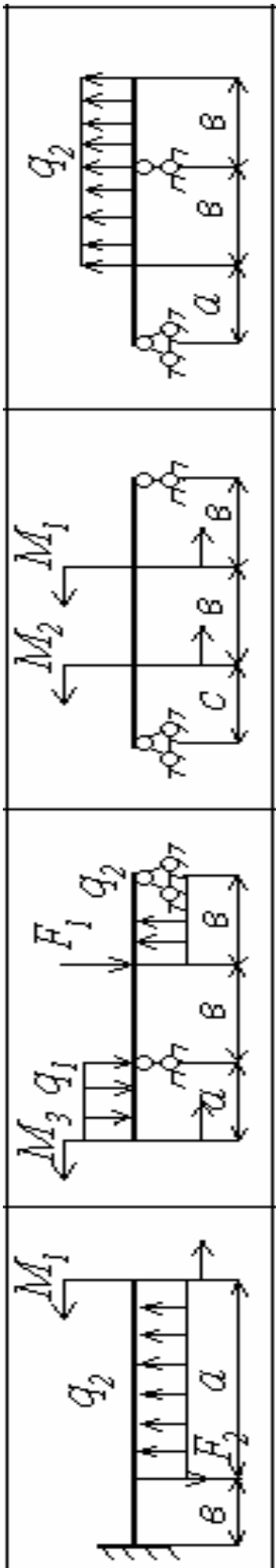
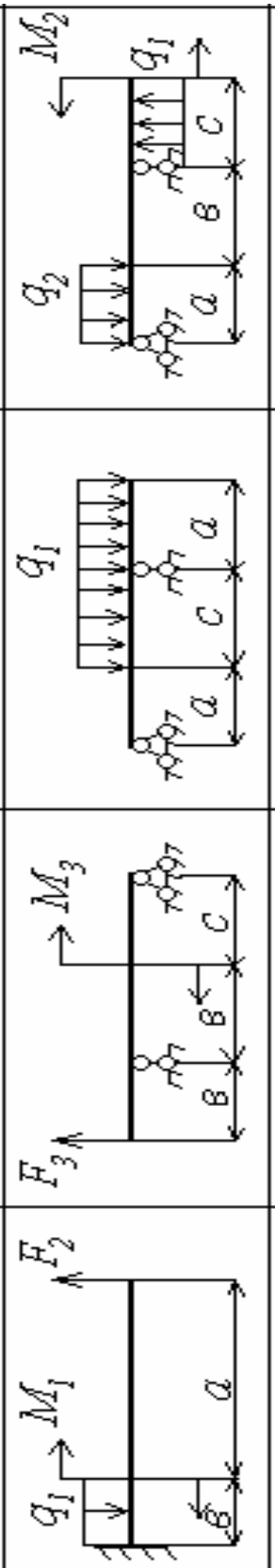
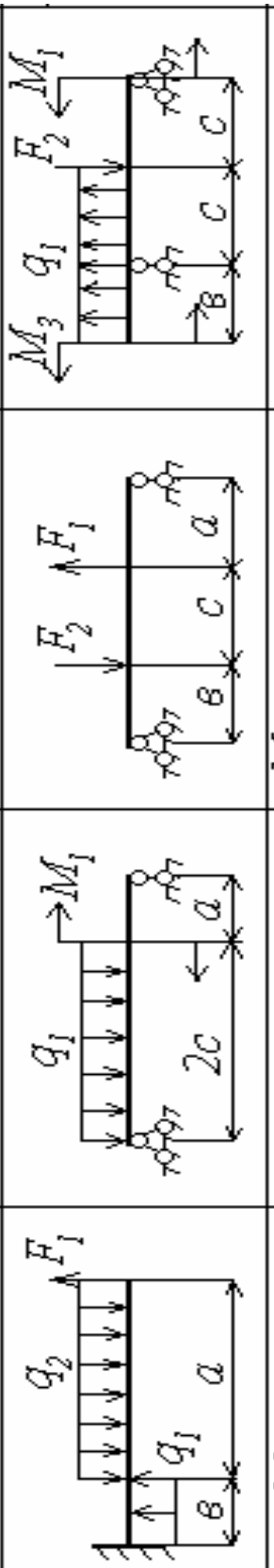
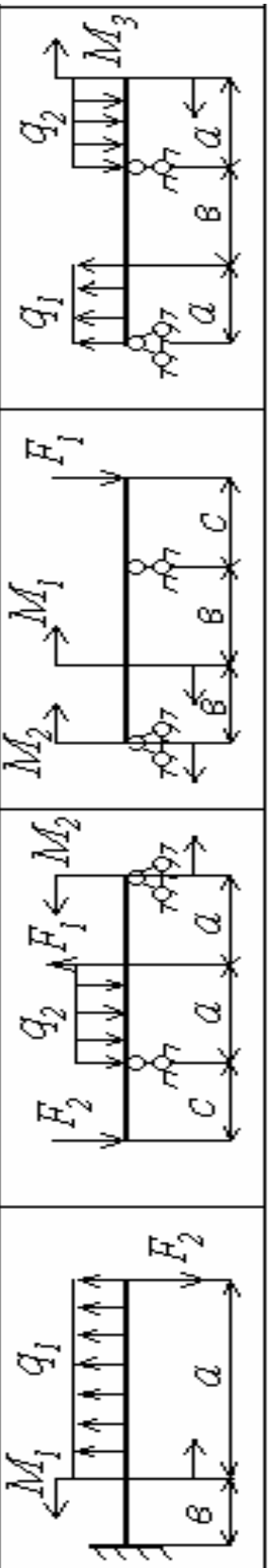
Додаток 2.1 − Розрахункові схеми



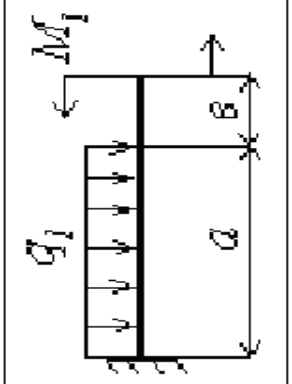
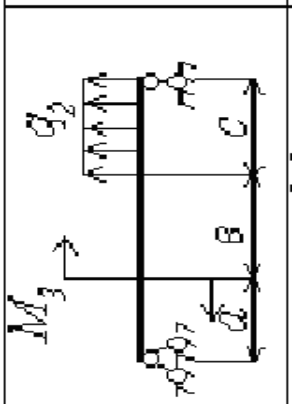
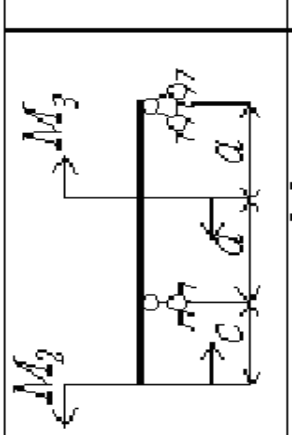
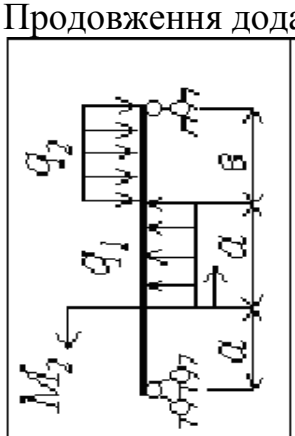
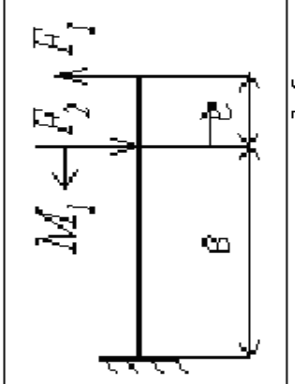
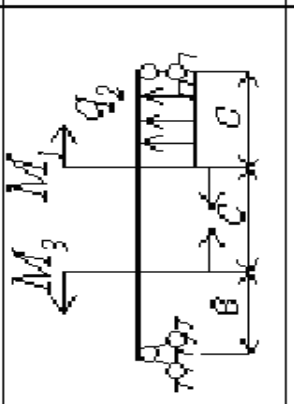
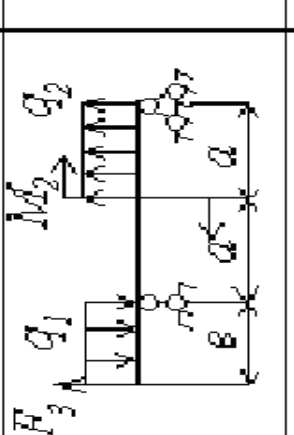
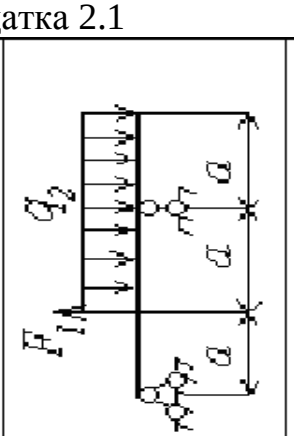
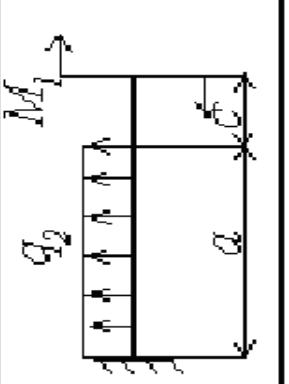
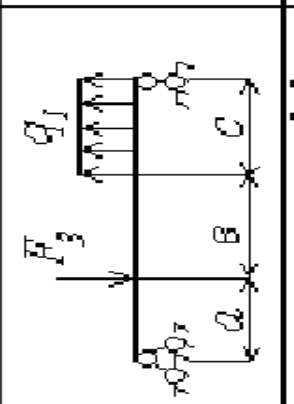
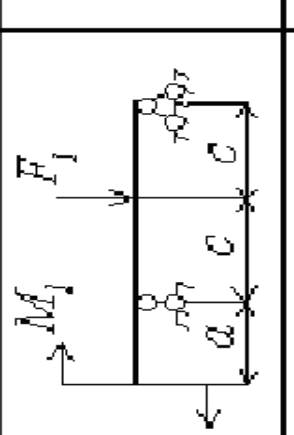
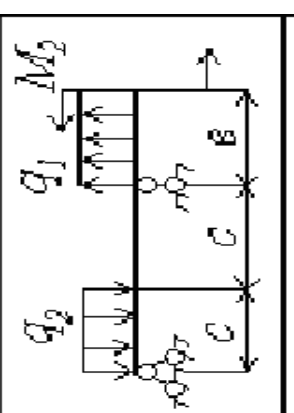
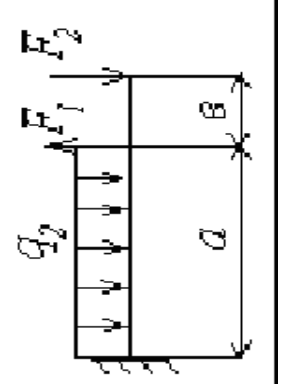
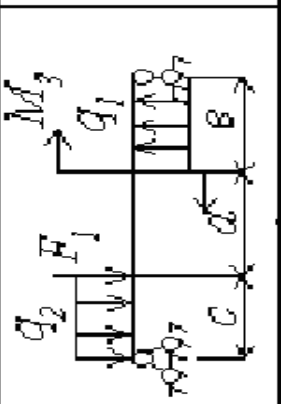
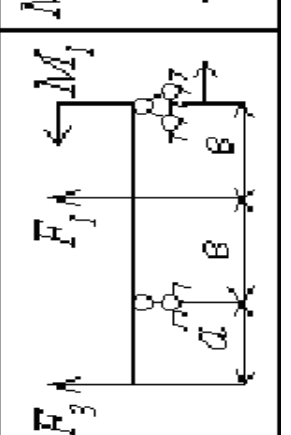
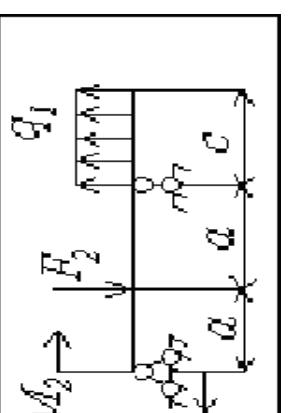
Продовження додатка 2.1

5				
6				
7				
8				

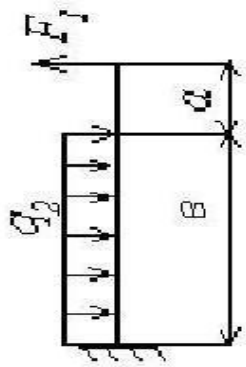
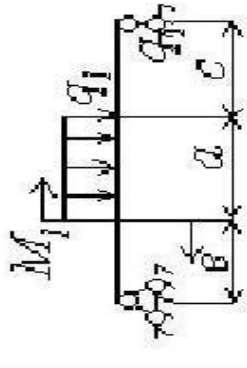
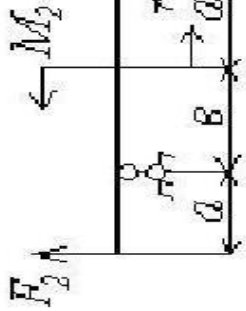
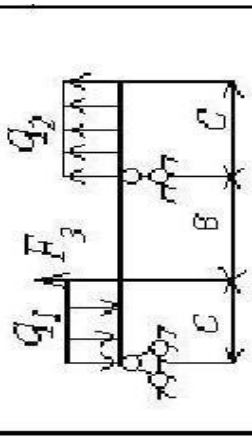
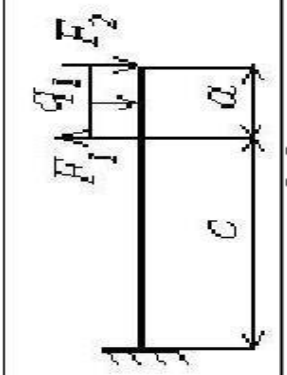
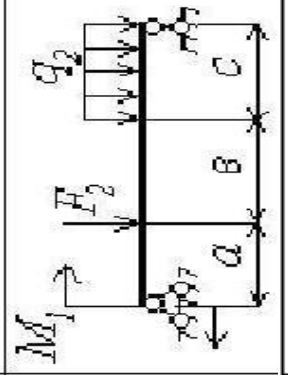
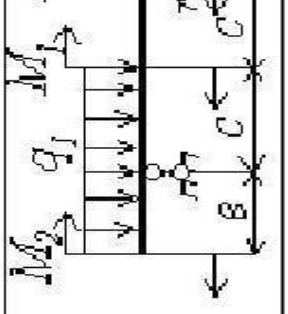
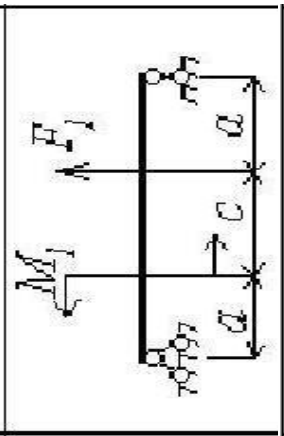
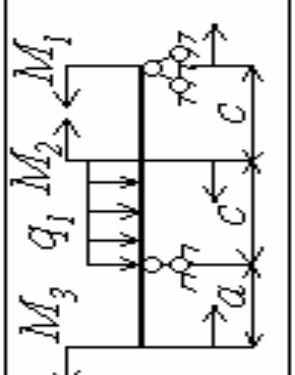
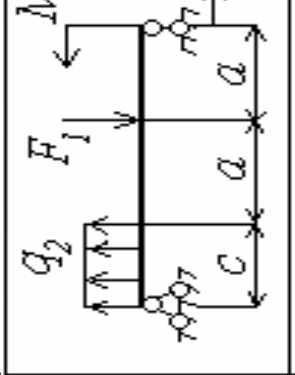
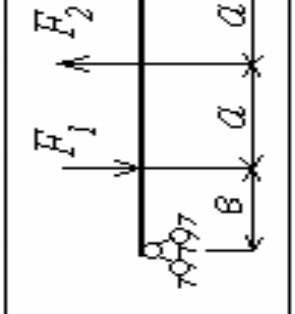
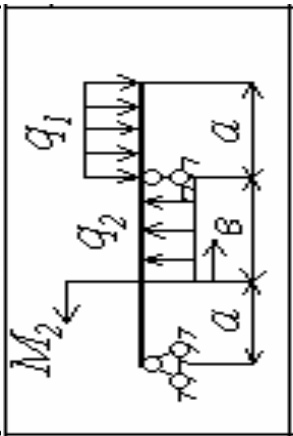
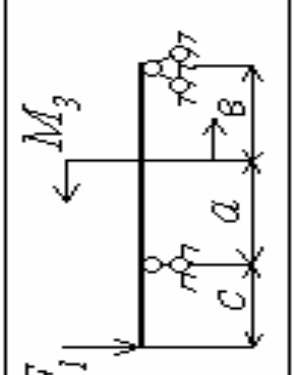
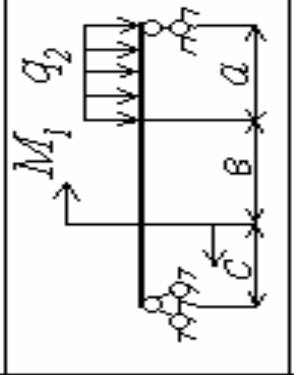
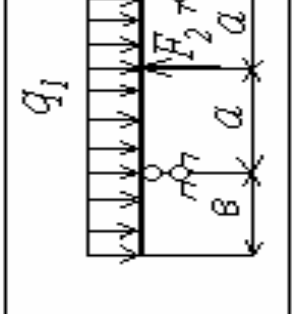
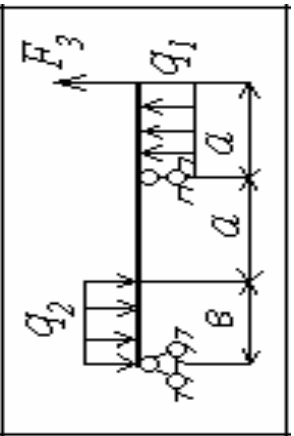
Продовження додатка 2.1

9				
10				
11				
12				

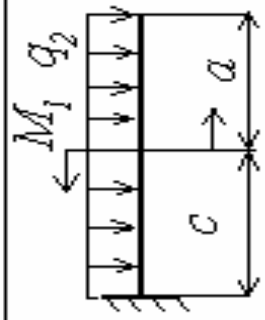
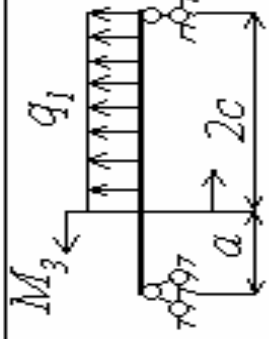
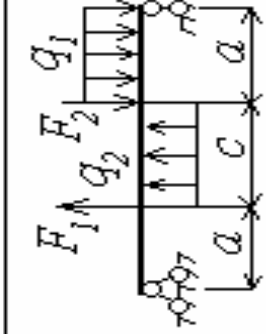
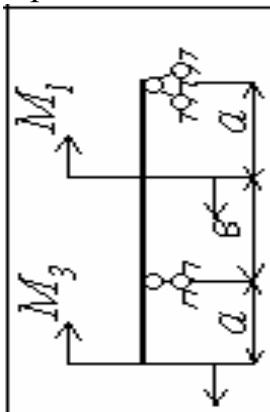
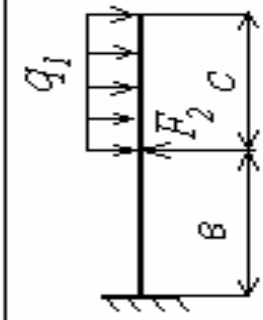
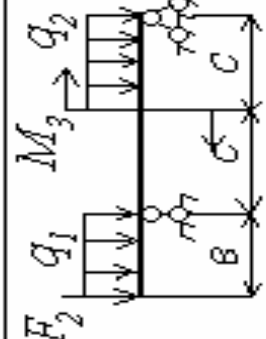
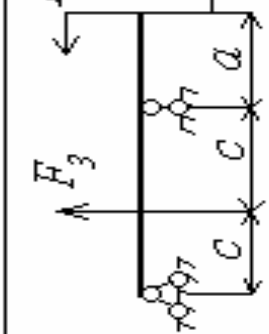
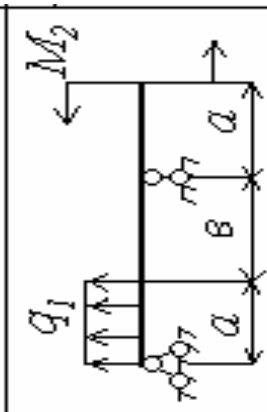
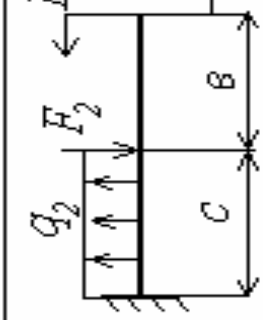
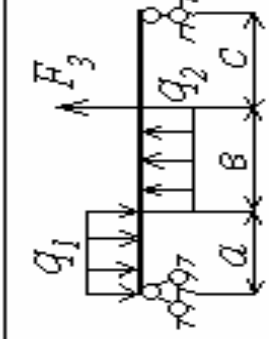
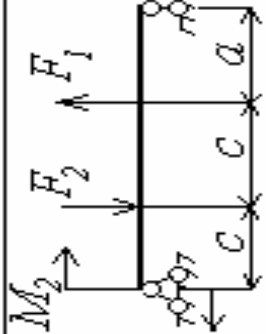
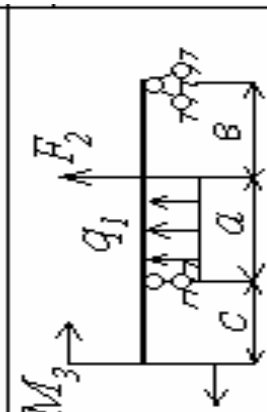
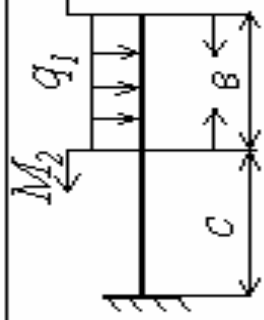
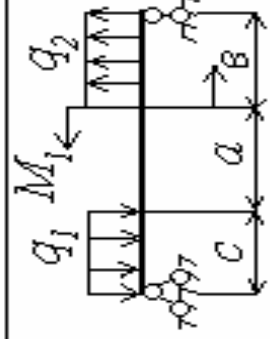
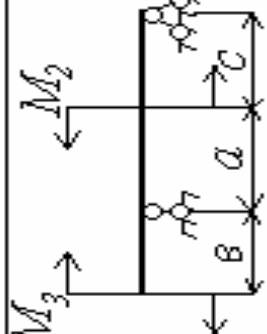
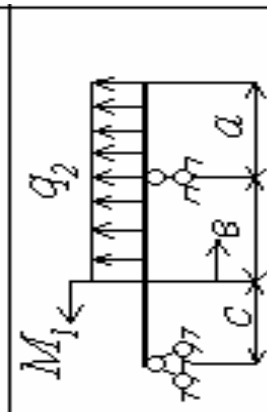
Продовження додатка 2.1

13				
14				
15				
16				

Продовження додатка 2.1

17				
18				
19				
20				

Продовження додатка 2.1

21				
22				
23				
24				

Додаток 2.2 − Вхідні дані

Варіант	F_1	F_2	F_3	M_1	M_2	M_3	q_1	q_2	$n_т$	a	b	c
	кН			кНм			кН/м			м		
1.	10	20	30	40	20	10	30	10	1,7	1,5	1,0	2,0
2.	30	10	20	30	30	20	50	30	1,4	2,0	2,5	2,0
3.	20	20	10	20	40	20	40	10	1,5	1,5	1,5	2,0
4.	10	30	20	20	10	20	20	40	1,6	2,5	2,5	1,5
5.	20	30	10	30	40	20	20	30	1,8	2,0	2,0	2,0
6.	30	10	20	10	30	40	10	20	2,0	1,5	2,0	2,5
7.	30	20	10	30	40	10	20	10	1,8	2,5	3,0	2,0
8.	50	10	20	20	20	30	30	20	1,6	2,0	2,0	2,0
9.	30	20	10	20	10	30	10	40	1,5	1,0	1,5	2,5
10.	10	40	30	10	40	20	20	30	1,4	1,5	2,5	2,0
11.	20	20	20	30	10	10	30	10	1,6	1,5	2,0	2,5
12.	20	30	40	20	30	40	40	30	1,4	2,5	3,0	2,0
13.	40	10	20	10	20	40	50	20	1,5	1,0	2,5	3,0
14.	50	20	10	20	10	20	10	30	1,6	1,5	1,2	2,5
15.	30	10	30	30	30	10	10	40	1,8	2,5	2,0	1,5
16.	10	20	30	40	20	10	30	10	1,7	1,5	1,0	2,0
17.	30	10	20	30	30	20	50	30	1,4	2,0	2,5	2,0
18.	20	20	10	20	40	20	40	10	1,5	1,5	1,5	2,0
19.	10	30	20	20	10	20	20	40	1,6	2,5	2,5	1,5
20.	20	30	10	30	40	20	20	30	1,8	2,0	2,0	2,0
21.	30	10	20	10	30	40	10	20	2,0	1,5	2,0	2,5
22.	30	20	10	30	40	10	20	10	1,8	2,5	3,0	2,0
23.	50	10	20	20	20	30	30	20	1,6	2,0	2,0	2,0
24.	30	20	10	20	10	30	10	40	1,5	1,0	1,5	2,5

Примітка. Матеріал − сталь Ст. 30: $\sigma_т$ = 300 МПа.

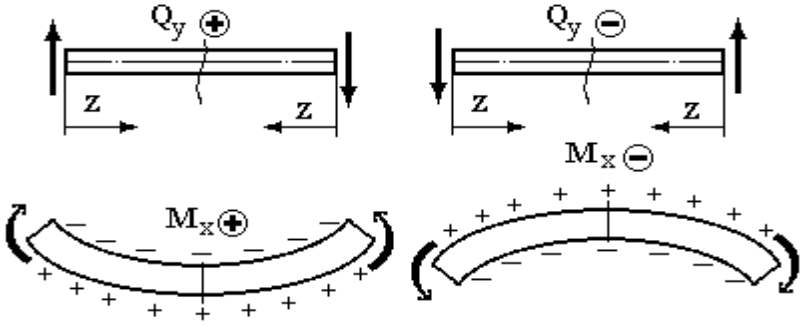
Додаток 2.3 − Основні поняття, позначення, формули, формулювання та правила з теми «Згинання стержнів»

Позначення та формули	Одиниця виміру	Назва
$Q_y = \sum F_{iy}$	Н (ньютон)	внутрішня поперечна сила
$M_x = \sum M_{xi}$	Нм	внутрішній згинальний момент
$\sigma = \dfrac{M_x y}{I_x}$	Па (паскаль)	нормальне напруження
$\sigma_{\max} = \dfrac{M_{x\max}}{W_x} \le [\sigma]$	Па	умова міцності за нормальними напруженнями
$\tau = \dfrac{Q_y S_x^{\text{відс}}}{b_y \cdot I_x} \le [\tau]$	Па	умова міцності за дотичними напруженнями
$I_x = \int_A y^2 dA$	$м^4$	осьовий момент інерції
$W_x = \dfrac{I_x}{y_{\max}}$	$м^3$	осьовий момент опору

Поперечна сила в даному перерізі – Q_y чисельно дорівнює алгебраїчній сумі проекцій на нормаль (вісь Y) до осі стержня сил, розташованих по одну сторону від перерізу (всіх однобічних сил), та утворює заміну дії відкинутої частини на залишену.

Згинальний момент M_x в даному перерізі z – чисельно дорівнює алгебраїчній сумі моментів щодо поперечної осі перерізу сил, які розташовані по одну сторону від цього перерізу (всіх однобічних сил).

Правила знаків :



Контрольні питання

1. Що називається згинанням балок?
2. Класифікація згинання.
3. Як знайти внутрішній згинальний момент у довільному перерізі балки?
4. Правило знаків для згинального моменту.
5. Як знайти внутрішню поперечну силу в довільному перерізі балки?
6. Правило знаків для поперечної сили.
7. Диференційні залежності при згинанні.
8. Правила побудови та перевірки епюр внутрішніх силових факторів.
9. Як визначити нормальні напруження при чистому згинанні?
10. Що таке нейтральна лінія і де вона знаходиться?
11. У яких точках перерізу виникають максимальні нормальні напруження?
12. Умова міцності по нормальним напруженням при згинанні.
13. Яку форму мають раціональні перерізи при згинанні?
14. Як визначити дотичні напруження при поперечному згинанні?
15. У яких точках перерізу виникають максимальні дотичні напруження?
16. Умова міцності по дотичним напруженням при згинанні.

3. КРУЧЕННЯ

В даному розділі посібника розглядаються два основних види деформації стержня: зсув (зріз) та кручення.

Зсув або зріз виникає тоді, коли зовнішні сили зміщують два паралельні плоскі перерізи стержня один відносно одного при незмінній відстані між ними.

Кручення виникає при дії на стержень зовнішніх сил, які утворюють момент відносно осі стержня. Деформація кручення супроводжується поворотом поперечних перерізів стержня один відносно одного навколо його осі.

3.1. Зсув

Деформація зсуву відбувається тоді, коли з шести компонент головного вектора сил та головного вектора моменту внутрішніх зусиль не дорівнюють нулю тільки поперечні сили Q_x або Q_y.

3.1.1. Основні поняття та визначення

Деформація зсуву виникає при дії на площадках виділеного елемента тільки дотичних напружень. Такий напружений стан називається чистим зсувом (рис. 3.1).

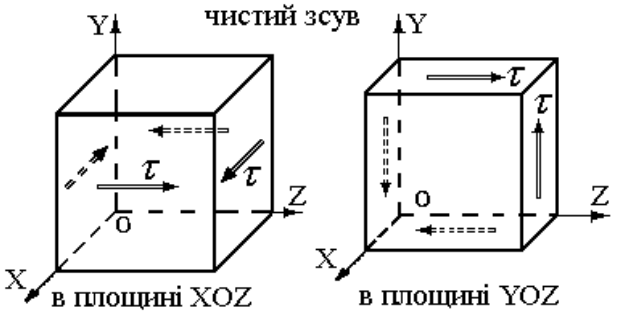


Рисунок 3.1

Деформація зсуву може бути отримана (приблизно), коли на стержень діють дві рівні по величині і протилежно спрямовані сили, перпендикулярні до осі стержня. Прикладом такої дії сил на брус може бути різання ножицями металевих прутків (рис. 3.2 а).

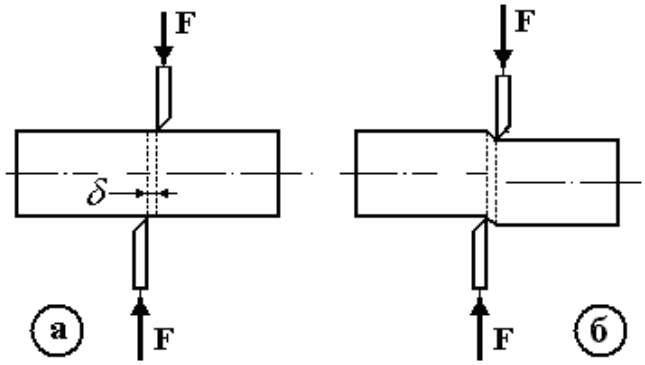


Рисунок 3.2

Через те, що між діючими силами існує деяка відстань, то, звичайно, деформація зсуву супроводжується іншими видами деформацій, найчастіше деформацією згинання (рис. 3.2 б). Розглянемо короткий прямокутний елемент, затиснений одним кінцем, під дією сили Q (рис. 3.3).

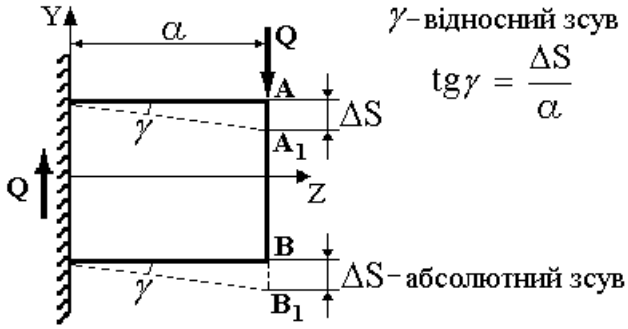


Рисунок 3.3

Дія сили Q викликає зсув елемента. Так як відстань між площинами, що зсуваються, мала, то виникаючим згинальним моментом зневажаємо. З рис. 3.3 неважко переконатися, що $AA_1 = BB_1 = \Delta S$. Величина ΔS називається **абсолютним зсувом**.

При деформації прямокутного елемента прямі кути змінюються на

величину γ, тангенс якого $\operatorname{tg}\gamma = \dfrac{\Delta S}{a}$. Через малість кута $\operatorname{tg}\gamma \approx \gamma$, тоді $\gamma = \dfrac{\Delta S}{a}$ – називають **відносним зсувом (кут зсуву, зрушення)**, що являє собою відношення абсолютного зсуву ΔS до відстані a між площинами.

Використовуючи метод перерізів (рис. 3.4 а), визначимо напруження, що виникають при зсуві. Візьмемо переріз 1–1 і розглянемо рівновагу відсіченої частини (рис. 3.4 б), для чого складемо рівняння $\sum F_{yi} = 0$: $Q - \int\limits_A \tau\, dA = 0$. Це рівняння не може бути вирішене без геометричного аналізу деформування (невідомі величина та закон зміни τ).

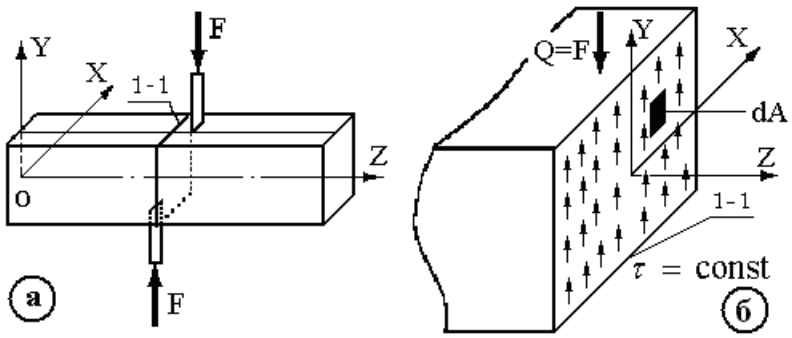


Рисунок 3.4

При розрахунках на зсув умовно приймається рівномірний закон розподілу τ по перерізу, тобто $\tau = \text{const}$. Тоді:

$$\tau = \frac{Q}{A_з}, \tag{3.1}$$

де $A_з$ – площа зрізу. Як і при будь-якому розрахунку опору матеріалів напруження в матеріалі повинні зіставлятися з напруженням, що допускається (допустиме напруження), тобто умова міцності на зріз має вигляд:

$$\tau = \frac{Q}{A_з} \le [\tau]. \tag{3.2}$$

Допустиме напруження приймається рівним : $[\tau] \approx (0{,}5 \div 0{,}6)\cdot[\sigma]$.

Дослідне вивчення зсуву в матеріалах проводиться на спеціальних тонкостінних трубках, що навантажуються крутним моментом до руйнування. У результаті цього одержують **діаграму зсуву**, що для пластично-

го матеріалу має вид (рис. 3.5). По діаграмі можна визначити характеристики міцності матеріалу при зсуві (зрізі).

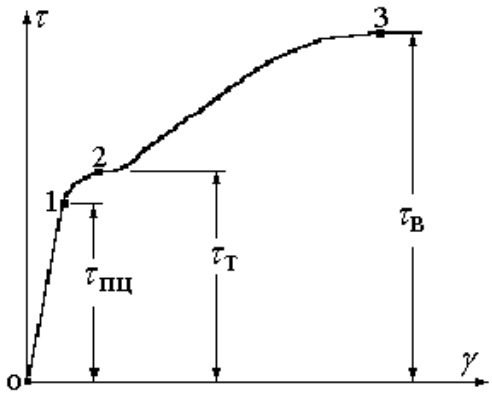


Рисунок 3.5

Межа (границя) пропорційності $\tau_{\text{пц}}$ матеріалу при зсуві – це найбільше напруження, до якого виконується закон Гука (точка 1).

Межа (границя) текучості $\tau_{\text{т}}$ **–** це найменше напруження, при якому відносний зсув зростає при практично постійному навантаженні (т. 2).

Межа (границя) міцності $\tau_{\text{в}}$ **при зсуві –** це максимальне напруження в матеріалі, при якому не настає руйнування (точка 3).

3.1.2. Закон Гука при зсуві

При центральному розтяганні – стисканні між нормальним напруженням σ, відносною деформацією ε та модулем подовжньої пружності E існує залежність $\sigma = E \cdot \varepsilon$, що називається законом Гука при розтяганні – стисканні. Аналогічна залежність, як показують експерименти, також існує між дотичним напруженням τ, відносним зсувом γ та модулем зсуву G, тобто закон Гука при зсуві:

$$\tau = G \cdot \gamma. \qquad (3.3)$$

Зв'язок трьох пружних постійних для ізотропного матеріалу (модуля поздовжньої пружності E , модуля зсуву G і коефіцієнта Пуассона μ) визначається залежністю /2/:

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}. \qquad (3.4)$$

Таким чином, модуль поздовжньої пружності E, модуль зсуву G і коефіцієнт Пуассона μ характеризують пружні властивості матеріалу.

3.2. Розрахунки на міцність і жорсткість при крученні

3.2.1. Основні поняття та визначення

Розповсюдженим стержневим елементом конструкцій машин, що працюють на кручення, є **вал.** Якщо навантаження на прямолінійний стержень (вал) складається тільки з моментів $M_к$, площини дії яких перпендикулярні до осі стержня, то із шести внутрішніх зусиль та моментів у довільному перерізі залишається лише один – **внутрішній крутний момент**.

Відзначимо, що крутний момент, наприклад, виникає у валах, що обертаються з кутовою швидкістю n [об/хв] та передають потужність K [кВт] – розподільні та передавальні вали зубчатих, пасових передач. У цьому випадку на валу в місцях посадки зубчатих коліс, шківів виникає зовнішній зосереджений крутний момент, [кНм]:

$$M_к = 9{,}55\,\frac{K}{n}.$$

Визначення внутрішніх крутних моментів та побудова епюр ґрунтуються на методі перерізів:

внутрішній крутний момент $M_к(z)$ у даному перерізі чисельно дорівнює алгебраїчній сумі зовнішніх крутних моментів, що розташовані по один бік від перерізу.

Правило знаків:

Зовнішній крутний момент вважається додатним, якщо при спостереганні з боку перерізу вздовж осі вала він намагається обертати відсічену частину проти годинникової стрілки.

Сформулюємо правила для побудови і перевірки правильності епюр крутних моментів:

1. При побудові епюр необхідно перевіряти рівновагу вала, тобто $\sum M_{zi} = 0$.

2. На ділянці з інтенсивністю розподіленого моменту $m = \text{const}$ епюра $M_к$ лінійна, а якщо $m = 0$, то епюра $M_к$ по довжині вала є кусочно-постійною по ділянках вала, тобто $M_{кi} = \text{const}$.

3. У точці прикладення зосередженого моменту на епюрі $M_к$ спостерігається стрибок на величину зовнішнього моменту.

Експериментально встановлено, що при дії на вал двох протилежно спрямованих крутних моментів $M_к$ (рис. 3.6) одні перерізи вала будуть

повертатися щодо інших навколо осі, у той час як довжина вала залишається незмінною.

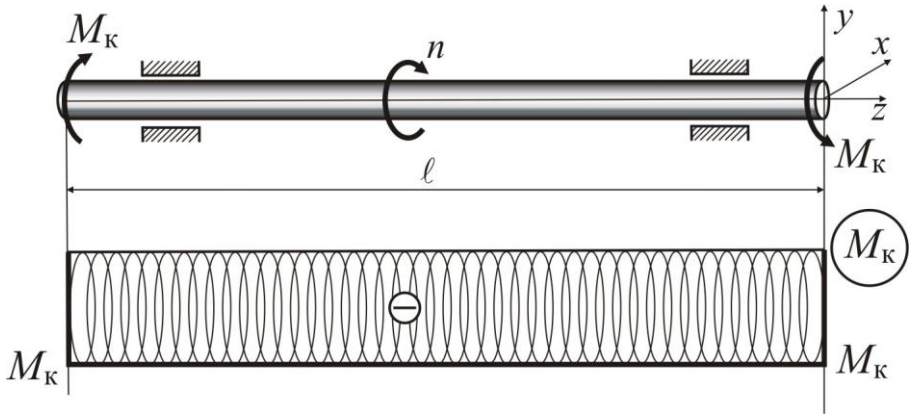


Рисунок 3.6

Якщо закручувати вал аж до руйнування і представити графічно залежність крутного моменту від кута закручування то одержимо **діаграму кручення**, що у випадку пластичного матеріалу має вид діаграми, показаної на рис. 3.7. На цій діаграмі також, як і на діаграмі розтягання, можна відзначити ряд характерних точок, що відповідають характеристикам матеріалу при крученні: точка 1 відповідає максимальному значенню моменту $M_{пц}$, до якого зберігається лінійна залежність між навантаженням $M_к$ і кутом закручування φ; у точці 2 спостерігається явище текучості матеріалу при крученні, коли при практично постійному моменті $M_т$ збільшується кут закручування; точка 3 відповідає максимальному значенню моменту M_{max}, при якому відбувається руйнування зразка.

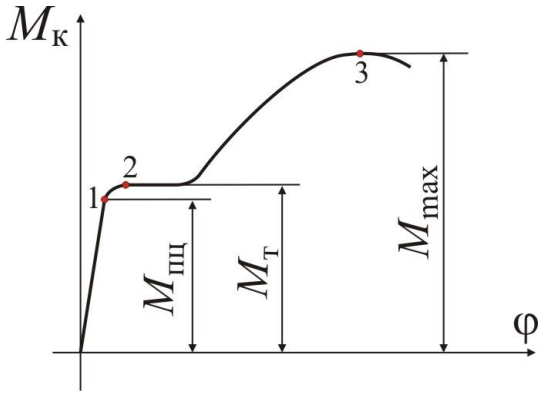


Рисунок 3.7

3.2.2. Дотичні напруження при крученні стержнів круглого та кільцевого перерізів

На валу з круглим перерізом (рис. 3.8 а) відзначимо утворюючі (меридіани) та поперечні перерізи (паралелі) та розглянемо експериментальні результати його кручення:

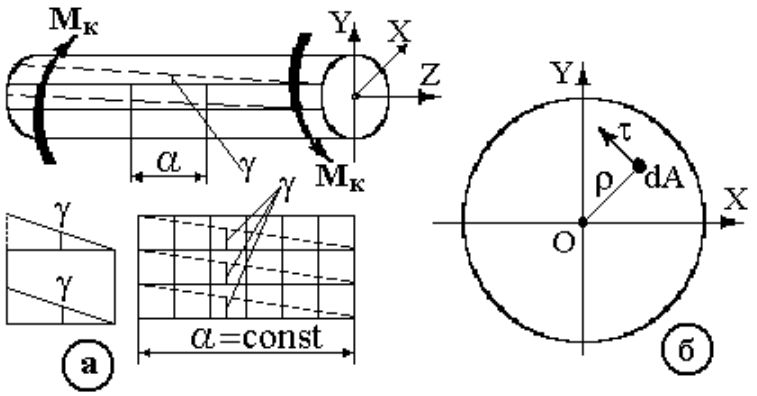


Рисунок 3.8

1. При крученні поперечні перерізи стержня повертаються навколо його осі і відносно один одного.

2. Утворюючі повертаються на один і той же кут γ. Прямокутники перетворюються в паралелограми, прямі кути змінюються, як і у випадку чистого зсуву (рис. 3.8 а). Це свідчить про те, що виділений елементарний обсяг будь-якого шару вала знаходиться в умовах чистого зсуву.

3. При крученні стержня круглого перерізу дотримується гіпотеза плоских перерізів: переріз плоский і нормальний до осі перед деформуванням залишається плоским і нормальним до осі в процесі деформівання.

4. Відстані між перерізами в процесі деформації не змінюються ($a = \text{const}$), це підтверджує відсутність у перерізі нормальних напружень.

5. Довжина і прямолінійність радіусів перерізів не порушується, тобто дотичні напруження τ у будь-якій точці перерізу перпендикулярні радіусу ρ (рис. 3.8 б).

Розглянемо стержень діаметром d, довжиною ℓ, що навантажений моментом M (рис. 3.9 а). На відстані z від правого краю виділимо елемент довжиною dz і розглянемо його рівновагу (рис. 3.9 б).

Вважаючи, що початок координат співпадає з центром ваги O перерізу, запишемо рівняння статичної рівноваги елементу dz:

$$\sum M_z = M_к - \int_A \tau \cdot \rho \cdot dA = 0. \qquad (3.5)$$

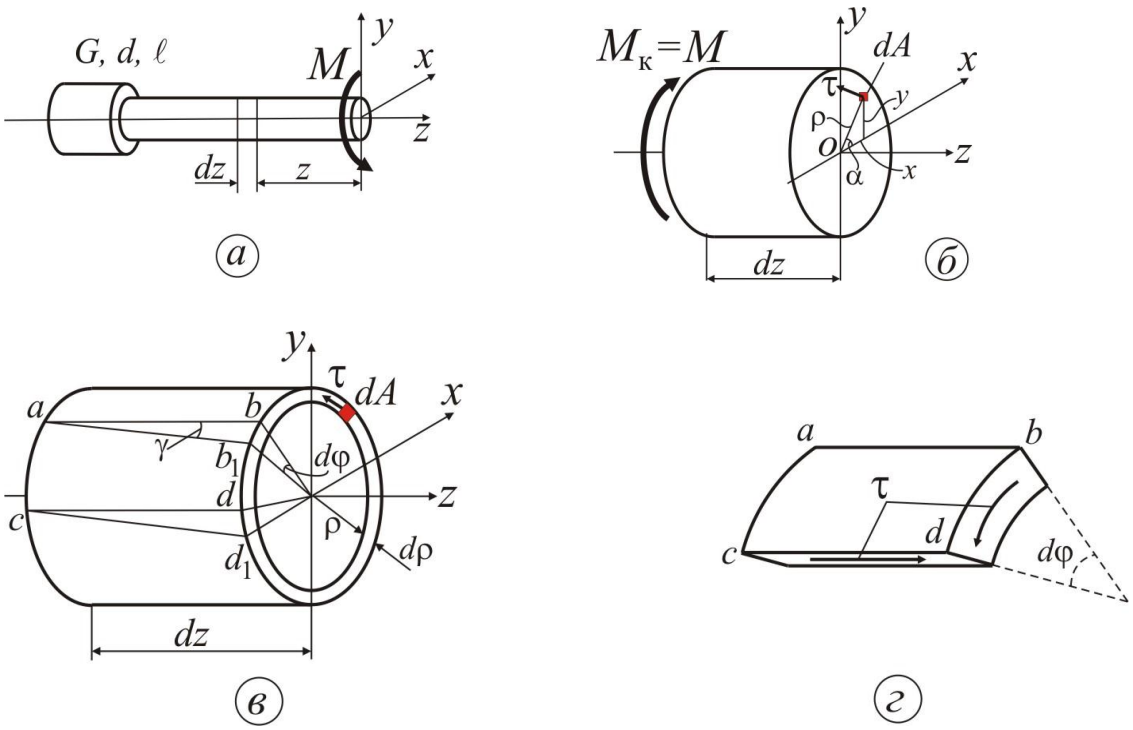


Рисунок 3.9

Проведемо геометричний аналіз деформацій при крученні. Для цього з нескінченно малої ділянки вала довжиною dz виділимо трубку, перерізом якої є нескінченно тонке кільце товщиною $d\rho$ (рис. 3.9 в). Умовно вважаємо, що лівий переріз нерухомий. Правий переріз повернеться навколо осі z на кут $d\varphi$, причому φ назвемо **абсолютним кутом закручування**. Утворюючі ab і cd на бічній поверхні циліндра переміщаються в положення ab_1 і cd_1 відповідно, зміщаючись на кут зсуву γ.

Обчислимо довжину дуги $\breve{b}b_1$ (рис. 3.9 в), розглядаючи спочатку криволінійний трикутник abb_1: $\breve{b}b_1 = dz \cdot \mathrm{tg}\gamma \approx \gamma \cdot dz$, а потім трикутник Obb_1 : $\breve{b}b_1 = (\rho + d\rho) \cdot d\varphi$ (для малих кутів $\mathrm{tg}\gamma \approx \gamma$). Зневажаючи нескінченно малими величинами другого порядку, одержуємо $\gamma \cdot dz = \rho \cdot d\varphi$, звідки $\gamma = \rho \cdot \dfrac{d\varphi}{dz}$.

Введемо поняття **відносного кута закручування**:

$$\theta = \frac{d\varphi}{dz}, \tag{3.6}$$

тоді :

$$\gamma = \rho \cdot \theta. \qquad (3.7)$$

Так як в нескінченно малому елементі $abcd$ виникає напружений стан чистого зсуву (рис. 3.9 г), то в межах малих деформацій виконується закон Гука при зсуві:

$$\tau = \gamma \cdot G. \qquad (3.8)$$

З виразів (3.7) , (3.8) одержимо:

$$\tau = G \cdot \rho \cdot \theta. \qquad (3.9)$$

Остання залежність виражає закон Гука при крученні, на підставі якого можна зробити висновок про те, що дотичні напруження вздовж радіуса переріза змінюються по лінійному закону.

Підставимо залежність (3.9) у рівняння (3.5) та одержимо наступне:

$$M_{\text{к}} - \int_A G \cdot \rho \cdot \theta \cdot \rho \, dA = M_{\text{к}} - G \cdot \theta \cdot \int_A \rho^2 dA = M_{\text{к}} - G \cdot \theta \cdot I_{\text{р}} = 0,$$

де $\int_A \rho^2 dA = I_{\text{р}}$ – полярний момент інерції перерізу.

Це дає можливість визначити відносний кут закручування:

$$\theta = \frac{M_{\text{к}}}{G \cdot I_{\text{р}}}. \qquad (3.10)$$

Величина $G \cdot I_{\text{р}}$ називається **жорсткістю вала при крученні**.

З виразів (3.9), (3.10) одержуємо формулу для визначення дотичних напружень при крученні вала круглого чи кільцевого перерізів:

$$\tau = \frac{M_{\text{к}}}{I_{\text{р}}} \rho. \qquad (3.11)$$

З рівняння (3.6) з урахуванням виразу (3.10) кут закручування дорівнює:

$$\varphi = \int_0^{\ell} \theta \, dz = \int_0^{\ell} \frac{M_{\text{к}} \, dz}{G \cdot I_{\text{р}}}.$$

Якщо $M_{\text{к}}$, $G \cdot I_{\text{р}}$ є постійними величинами, то абсолютний кут закручування φ вала можна обчислити за формулою:

$$\varphi = \theta \cdot \ell = \frac{M_{\text{к}} \cdot \ell}{G \cdot I_{\text{р}}}. \qquad (3.12)$$

3.2.3. Розрахунок на міцність при крученні стержня круглого та кільцевого перерізу

З рівняння (3.11) випливає, що дотичні напруження по радіусу перерізу розподіляються лінійно, тому максимальні дотичні напруження виникають у крайніх точках перерізу, де $\rho = \rho_{\max}$:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{к}}}{I_{\text{р}}} \cdot \rho_{\max} \quad . \tag{3.13}$$

Епюри дотичних напружень для круглого та кільцевого перерізів наведені на рис. 3.10.

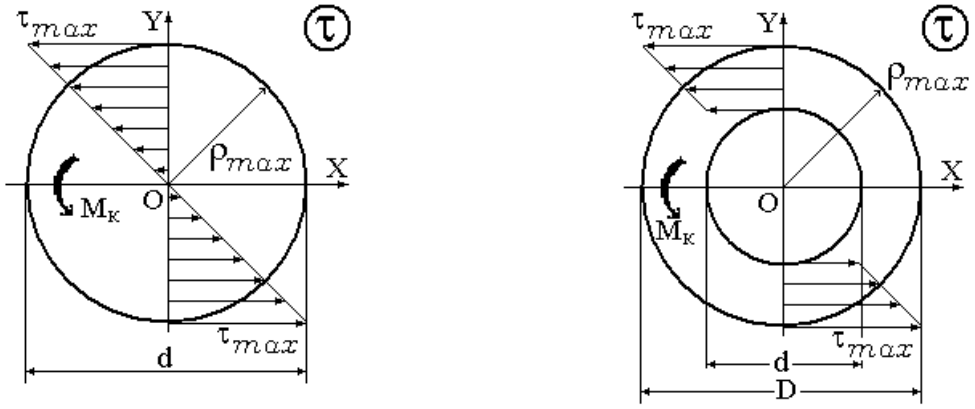


Рисунок 3.10

З огляду на те, що величина $\dfrac{I_{\text{р}}}{\rho_{\max}} = W_{\text{р}}$ є **полярним моментом опору** перерізу, **умова міцності при крученні** запишеться у вигляді:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{к}}}{W_{\text{р}}} \le [\tau], \tag{3.12}$$

де $[\tau] = \dfrac{\tau_{\text{т}}}{n_{\text{т}}}$ – допустиме дотичне напруження ($\tau_{\text{т}}$ – границя текучості матеріалу, $n_{\text{т}}$ – коефіцієнт запасу міцності).

Значення полярного моменту опору круглого перерізу дорівнює:

$$W_{\text{р}} = \frac{\pi \cdot d^3}{16} \approx 0{,}2 \cdot d^3,$$

а для кільцевого перерізу:

$$W_{\text{р}} = \frac{\pi \cdot D^3}{16}\left(1 - c^4\right) \approx 0{,}2 \cdot D^3 \cdot \left(1 - c^4\right), \text{ де } \quad c = \frac{d}{D}.$$

Діаметр вала круглого перерізу обчислюється з умови міцності (3.12) за формулою:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{\text{к}}}{\pi \cdot [\tau]}} \approx \sqrt[3]{\frac{M_{\text{к}}}{0{,}2 \cdot [\tau]}},$$

а зовнішній діаметр кільцевого перерізу:

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{\text{к}}}{\pi \cdot [\tau] \cdot \left(1 - c^4\right)}} \approx \sqrt[3]{\frac{M_{\text{к}}}{0{,}2 \cdot [\tau] \cdot \left(1 - c^4\right)}}.$$

3.2.4. Розрахунок на жорсткість при крученні стержня круглого та кільцевого перерізу

Крім розрахунку на міцність вали розраховуються на жорсткість. Умова жорсткості має вигляд:

$$\theta_{\max} = \frac{M_{\text{к}}}{G \cdot I_{\text{р}}} \leq [\theta], \tag{3.13}$$

де $[\theta]$ – допустимий відносний кут закручування, що вимірюється у [рад/м].

Полярний момент інерції для круглого перерізу визначається як

$$I_{\text{р}} = \frac{\pi \cdot d^4}{32} \approx 0{,}1 \cdot d^4,$$

а для кільцевого:

$$I_{\text{р}} = \frac{\pi \cdot D^4}{32}\left(1 - c^4\right) \approx 0{,}1 \cdot D^4 \cdot \left(1 - c^4\right).$$

Тоді, з умови жорсткості, діаметр вала круглого перерізу дорівнює:

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot M_{\text{к}}}{\pi \cdot G \cdot [\theta]}} \approx \sqrt[4]{\frac{M_{\text{к}}}{0{,}1 \cdot G \cdot [\theta]}}.$$

Для кільцевого перерізу зовнішній діаметр визначається як:

$$D \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot M_{\text{к}}}{\pi \cdot G \cdot [\theta] \cdot \left(1 - c^4\right)}} \approx \sqrt[4]{\frac{M_{\text{к}}}{0{,}1 \cdot G \cdot [\theta] \cdot \left(1 - c^4\right)}}.$$

Приклад

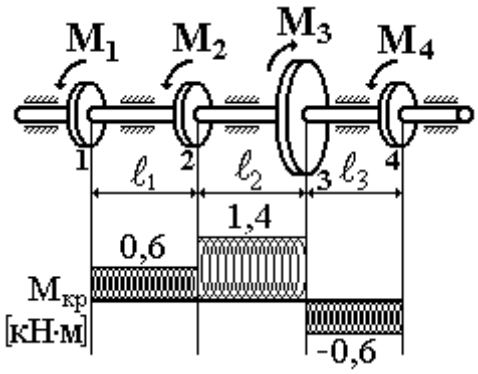


Рисунок 3.11

З умов міцності та жорсткості визначити діаметр вала круглого перерізу (рис. 3.11) при таких значеннях крутних моментів:

$M_1 = 0{,}6$ кНм ; $M_2 = 0{,}8$ кНм ;

$M_3 = 2{,}0$ кНм ; $M_4 = 0{,}6$ кНм .

Допустиме напруження $[\tau] = 20$ МПа , допустимий відносний кут закручування $[\theta] = 0{,}25$ град/м $= 0{,}25 \cdot \pi /180 = 4{,}4 \cdot 10^{-3}$ рад/м .

Модуль пружності сталі при зсуві $G = 0{,}8 \cdot 10^5$ МПа .

З епюри крутних моментів визначаємо небезпечну ділянку, де діє найбільший момент: $M_{\text{кр max}} = M_1 + M_2 = (0{,}6 + 0{,}8) = 1{,}4$ кНм .

Доберемо діаметр вала з умови міцності:

$$d_{\text{міцн.}} \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{\text{к}}}{\pi \cdot [\tau]}} \approx \sqrt[3]{\frac{M_{\text{к}}}{0{,}2 \cdot [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{1{,}4 \cdot 10^3}{0{,}2 \cdot 20 \cdot 10^6}} = 0{,}0705 \text{ м} = 70{,}5 \text{ мм}.$$

Тепер доберемо діаметр вала з умови жорсткості:

$$d_{\text{жорст.}} \geq \sqrt[4]{\frac{32 M_{\text{к}}}{\pi \cdot G \cdot [\theta]}} \approx \sqrt[4]{\frac{M_{\text{к}}}{0{,}1 \cdot G \cdot [\theta]}} =$$

$$= \sqrt[4]{\frac{1{,}4 \cdot 10^3}{0{,}1 \cdot 0{,}8 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 4{,}4 \cdot 10^{-3}}} \approx 0{,}0794 \text{ м} = 79{,}4 \text{ мм}.$$

Із двох діаметрів слід вибрати більший, знайдений з умови жорсткості та округлити його в більшу сторону до найближчого стандартного значення: $d = \max\{d_{\text{міцн.}}; d_{\text{жорст.}}\} = 80$ мм. При цьому, максимальні дотичні напруження будуть на другій ділянці валу:

$$\tau_{\max} = \tau_2 = \frac{M_{\text{кр}\,2}}{W_{\text{р}}} = \frac{1{,}4 \cdot 10^3}{0{,}2 \cdot 80^3 \cdot 10^{-9}} = 13{,}67 \text{ МПа} \leq [\tau].$$

3.2.5. Кручення стержнів прямокутного перерізу

При крученні стержнів некруглого перерізу (прямокутних, трикутних, еліптичних, прокатних, тонкостінних і ін.) гіпотеза плоских перерізів не виконується. Поперечні перерізи не залишаються плоскими, окремі точки виходять із площини – перерізи піддаються ***депланації***. При крученні стержня постійного перерізу крутними моментами, прикладеними до вільних його кінців, депланація всіх поперечних перерізів виявляється однаковою. При рівномірній депланації нормальні напруження в поперечних перерізах не виникають. Такий вид кручення називається чистим (вільним) крученням, при якому величини і характер розподілу дотичних напружень в усіх перерізах однаковий.

Рішення задачі про чисте кручення некруглих стержнів методами опору матеріалів неможливо. Точні рішення задач про кручення стержнів некруглого перерізу отримані в теорії пружності. Остаточні формули для визначення максимальних дотичних напружень $\tau_{\max}$, відносного кута закручування θ і абсолютного кута закручування φ стержня довжиною ℓ, як і для стержнів круглого перерізу, мають вигляд:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{к}}}{W_{\text{к}}}; \qquad \theta = \frac{M_{\text{к}}}{G \cdot I_{\text{к}}}; \qquad \varphi = \frac{M_{\text{к}} \ell}{G \cdot I_{\text{к}}},$$

де $W_{\text{к}}$ – момент опору на кручення, $I_{\text{к}}$ – момент інерції на кручення.

Розподіл дотичних напружень τ для прямокутного перерізу приведене на рис. 3.12. Найбільші напруження $\tau_{\max}$ виникають на серединах довгих сторін перерізу (точки A и B). Дотичні напруження на серединах коротких сторін (точки C,D) визначаються за формулою $\tau' = \gamma \cdot \tau_{\max}$.

Момент опору на кручення $W_{\text{к}}$ і момент інерції на кручення $I_{\text{к}}$ для прямокутного перерізу мають вигляд:

$$W_{\text{к}} = \alpha \cdot h \cdot b^2, \qquad I_{\text{к}} = \beta \cdot h \cdot b^3.$$

Коефіцієнти α, β, γ визначаються в залежності від відношення довгої сторони h прямокутника до короткої сторони b і наведені в таблиці 3.1.

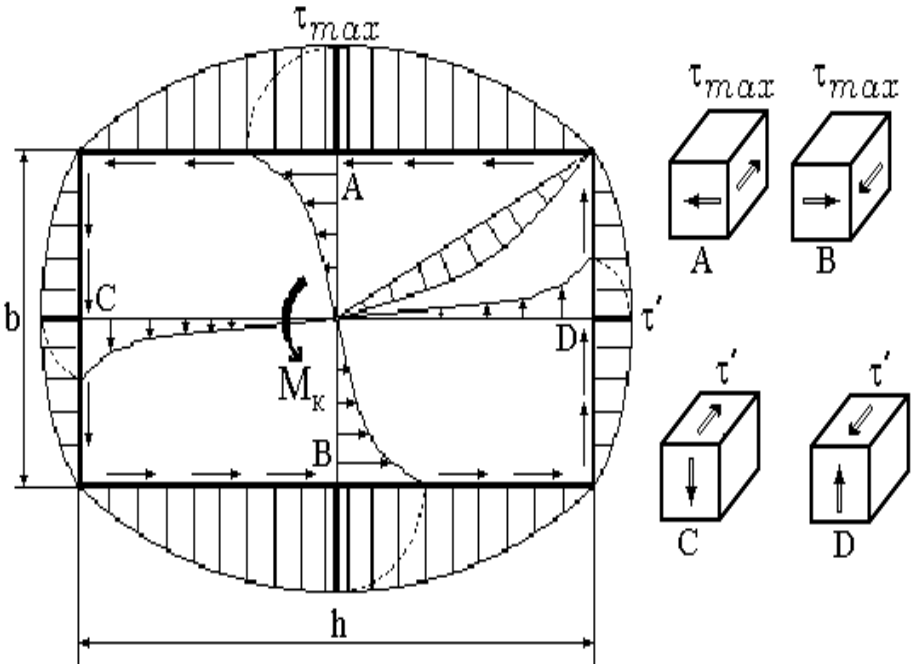


Рисунок 3.12

Умова міцності при крученні стержня прямокутного перерізу має вигляд:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{к}}}{W_{\text{к}}} \le [\tau].$$

Умова жорсткості при крученні приймається для відносного кута закручування:

$$\theta = \frac{M_{\text{к}}}{G \cdot I_{\text{к}}} \le [\theta],$$

або для абсолютного кута закручування:

$$\varphi = \frac{M_{\text{к}} \ell}{G \cdot I_{\text{к}}} \le [\varphi].$$

Таблиця 3.1 − Кручення призматичного стержня прямокутного перерізу (таблиця коефіцієнтів α, β, γ)

h/b	α	β	γ
1,00	0,208	0,141	1,000
1,05	0,211	0,147	0,981
1,10	0,214	0,154	0,963
1,15	0,217	0,160	0,946
1,20	0,219	0,166	0,931
1,25	0,221	0,172	0,916
1,30	0,223	0,177	0,903
1,35	0,225	0,182	0,891
1,40	0,227	0,187	0,879
1,45	0,229	0,191	0,869
1,50	0,231	0,196	0,859
1,55	0,233	0,200	0,850
1,60	0,234	0,204	0,842
1,65	0,236	0,207	0,834
1,70	0,237	0,211	0,827
1,75	0,239	0,214	0,821
1,80	0,240	0,217	0,815
1,85	0,242	0,220	0,809
1,90	0,243	0,223	0,804
1,95	0,245	0,226	0,800
2,00	0,246	0,229	0,795
2,10	0,248	0,234	0,787
2,25	0,252	0,240	0,778
2,50	0,258	0,249	0,766
2,75	0,263	0,257	0,759
3,00	0,267	0,263	0,753
3,25	0,271	0,269	0,750
3,50	0,275	0,273	0,748
3,75	0,279	0,277	0,746
4,00	0,282	0,281	0,745
5,00	0,292	0,291	0,743
6,00	0,298	0,298	0,743
7,00	0,303	0,303	0,742
8,00	0,307	0,307	0,742
∞	0,333	0,333	0,742

3.3. Статично невизначувані системи при крученні

Статично невизначуваною називається кінематично незмінна система, у якої число невідомих зусиль, включаючи реакції опор і внутрішні силові фактори (крутні моменти), більше числа рівнянь статики, які можна скласти для даної задачі.

Порядок рішення статично невизначуваних задач розглянемо на прикладі.

Приклад

Розкрити статичну невизначеність стержня (рис. 3.13), побудувати епюру крутних моментів та визначити параметр d круглих поперечних перерізів стержня з умови міцності.

Статична сторона задачі

Складемо єдине можливе рівняння рівноваги з двома невідомими M_C, M_B, тому задача є один раз статично невизначеною:

$$\sum M_z = M_C + M_B - M_1 + M_2 = M_C + M_B + 3M = 0. \qquad (3.14)$$

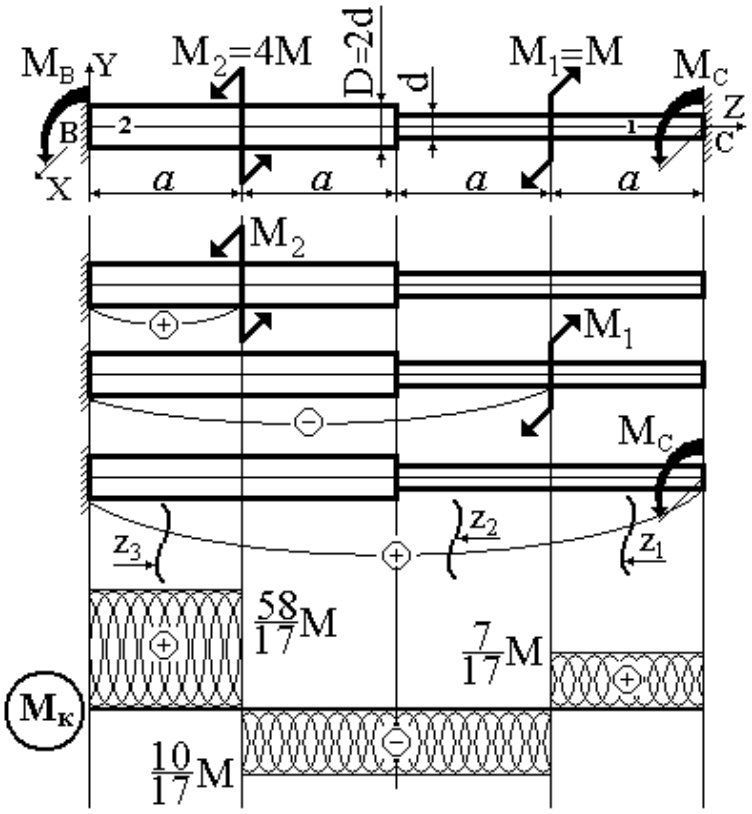


Рисунок 3.13

Геометрична сторона задачі

Для розкриття статичної невизначуваності необхідно скласти одне рівняння спільності переміщень.

Умовно відкинемо праве затиснення, а його дію замінимо моментом M_{C}, при цьому задача стає статично визначуваною. Момент M_{C} визначається з умови, що поворот правого торцевого перерізу щодо лівого під дією моментів M_{C}, M_1, M_2 дорівнює нулю:

$$\varphi_{\text{CB}} = \varphi_{M_{\text{C}}} + \varphi_{M_1} + \varphi_{M_2} = 0. \qquad (3.15)$$

Фізична сторона задачі

Скористаємося законом Гука при крученні для кутів закручування. Момент M_{C} закручує в напрямку проти руху часової стрілки весь стержень; момент M_1 − в напрямку за рухом часової стрілки частину стержня між лівим затисненням та місцем розташування M_1; момент M_2 − проти руху часової стрілки тільки першу ділянку стержня:

$$\varphi_{M_{\text{C}}} = \frac{M_{\text{C}} \cdot 2a}{G \cdot I_{\text{p}1}} + \frac{M_{\text{C}} \cdot 2a}{G \cdot I_{\text{p}2}},$$

$$\varphi_{M_1} = -\frac{M_1 \cdot a}{G \cdot I_{\text{p}1}} - \frac{M_1 \cdot 2a}{G \cdot I_{\text{p}2}}, \qquad (3.16)$$

$$\varphi_{M_2} = \frac{M_2 \cdot a}{G \cdot I_{\text{p}2}},$$

де $I_{\text{p}1} = \dfrac{\pi \cdot d^4}{32}$, $I_{\text{p}2} = \dfrac{\pi \cdot D^4}{32} = 16 \cdot \dfrac{\pi \cdot d^4}{32} = 16 \cdot I_{\text{p}1}$ − полярні моменти інерції круглого перерізу першої та другої половини стержня.

Спільне рішення рівнянь

Підставимо (3.16) в (3.15):

$$\varphi_{\text{CB}} = \frac{M_C \cdot 2a}{G \cdot I_{\text{p}1}} + \frac{M_{\text{C}} \cdot 2a}{G \cdot I_{\text{p}2}} - \frac{M_1 \cdot a}{G \cdot I_{\text{p}1}} - \frac{M_1 \cdot 2a}{G \cdot I_{\text{p}2}} + \frac{M_2 \cdot a}{G \cdot I_{\text{p}2}} = 0.$$

З обліком того, що $M_2 = 4M$, $M_1 = M$, а $I_{\text{p}2} = 16 \cdot I_{\text{p}1}$, одержимо:

$$M_{\text{C}}\left(2+\frac{2}{16}\right)-M-\frac{2M}{16}+\frac{4M}{16}=0,$$

звідки: $M_{\text{C}}=\frac{7}{17}M$.

З рівняння рівноваги (3.14) знаходимо момент в лівому затисненні:

$$M_{\text{B}}=-3M-M_C=-M\left(3+\frac{7}{17}\right)=-\frac{58}{17}M.$$

Побудова епюри крутних моментів

Обчислюємо значення внутрішніх крутних моментів по ділянках стержня, які показані на рис. 3.13:

$$M_{\text{к}}(z_1)=M_{\text{C}}=\frac{7}{17}M;$$

$$M_{\text{к}}(z_2)=M_{\text{C}}-M_1=-\frac{10}{17}M;$$

$$M_{\text{к}}(z_3)=-M_{\text{B}}=\frac{58}{17}M.$$

Перевіряємо правильність рішення задачі, для чого обчислимо кут повороту правого торцевого перерізу щодо лівого затиснення φ_{CB}, який повинен дорівнювати нулю:

$$\varphi_{\text{CB}}=\frac{7M\cdot a}{17GI_{\text{p}1}}-\frac{10M\cdot a}{17GI_{\text{p}1}}-\frac{10M\cdot a}{17G\cdot 16I_{\text{p}1}}+\frac{58M\cdot a}{17G\cdot 16I_{\text{p}1}}=$$

$$=\frac{M\cdot a}{17G\cdot 16I_{\text{p}1}}(112-160-10+58)=\frac{M\cdot a}{17G\cdot 16I_{\text{p}1}}(170-170)\equiv 0.$$

Визначення розмірів поперечного перерізу

Обчислення параметру d поперечного перерізу проводимо в найбільш напруженій ділянці стержня. Для цього здійснюємо порівняльний аналіз найбільших дотичних напружень на чотирьох ділянках згідно виразу (3.12):

1-а ділянка діаметром d: $\tau_{\max}=\frac{7M}{17W_{\text{p}1}}$;

2-а ділянка діаметром d: $\tau_{\max} = \dfrac{10M}{17W_{\text{p}1}}$;

3-я ділянка діаметром D: $\tau_{\max} = \dfrac{10M}{17W_{\text{p}2}} = \dfrac{10M}{17 \cdot 8W_{\text{p}1}} = \dfrac{1{,}25M}{17W_{\text{p}1}}$;

4-а ділянка діаметром D: $\tau_{\max} = \dfrac{58M}{17W_{\text{p}2}} = \dfrac{7{,}25M}{17W_{\text{p}1}}$.

У вищенаведених виразах полярні моменти опору перерізів окремих ділянок стержня дорівнюють: $W_{\text{p}1} = \dfrac{\pi \cdot d^3}{16}$, $W_{\text{p}2} = \dfrac{\pi \cdot D^3}{16} = 8\dfrac{\pi \cdot d^3}{16} = 8 \cdot W_{\text{p}1}$.

Порівнюючи результати аналізу, робимо висновок, що найбільш навантаженою є друга ділянка стержня діаметром d.

З умови міцності (3.12) $\tau_{\max} = \dfrac{M_{\kappa}(z_2)}{W_{\text{p}1}} = \dfrac{16 \cdot \dfrac{10}{17}M}{\pi \cdot d^3} \le [\tau]$,

одержимо: $d \ge \sqrt[3]{\dfrac{16 \cdot \dfrac{10}{17}M}{\pi[\tau]}}$.

3.4. Розрахунково-проектувальне завдання

При вивченні розділів „Зсув” та „Кручення” в курсі „Опір матеріалів” ставиться мета навчити студентів основам інженерного розрахунку елементів конструкцій машин і механізмів на міцність і жорсткість з урахуванням умов роботи, властивостей матеріалів та різноманітних типів поперечних перерізів.

Для кращої організації і більш ефективної самостійної роботи студентів, згідно з вимогами програми курсу , студентам пропонується до виконання задачі по темі „Розрахунки на міцність та жорсткість при крученні”. Виконуючи цю роботу, студент практично знайомиться з методами обчислення крутних моментів, побудови епюр моментів та напружень, визначення розмірів та форми поперечного перерізу для різноманітних схем, що забезпечують умови міцності та жорсткості.

3.4.1. Склад розрахунково-проектувального завдання

Розрахунково-проектувальне завдання складається з трьох етапів:

1. Рішення запропонованих викладачем задач для певних варіантів розрахункових схем і вихідних даних, оформлення їх за вимогами кафедри „Опору матеріалів”.

2. Написання контрольних робіт.

3. Захист завдання. Захист включає в себе пояснення методів і принципів розв'язання задач і відповідь на контрольні теоретичні запитання. Кількість та об’єм цих запитань визначається викладачем індивідуально для кожного студента.

Мета роботи – проведення проектувального розрахунку для визначення розмірів поперечного перерізу з умов міцності та жорсткості.

Для цього задані:

1. Схема заданої системи з вказівкою довжин дільниць і зовнішнього навантаження.

2. Форма і співвідношення розмірів поперечного перерізу.

3. Допустиме дотичне напруження $[\tau]$, допустимий відносний кут закручування $[\theta]$, модуль зсуву матеріалу G.

Завдання складається з двох обов’язкових для рішення задач:

Задача 1: З умов міцності та жорсткості обрати розміри поперечних перерізів (діаметр круглого і кільцевого валів) для статично визначуваної системи. Порівняти їхні ваги. Варіанти розрахункових схем наведені в додатку 3.1, а чисельні дані – в таблиці ДЗ.1.

Задача 2: Для заданої статично невизначуваної системи з послідовним розташуванням ділянок стержня з розрахунку на міцність визначити розміри поперечних перерізів на всіх ділянках стержня і побудувати епюру кутів закручування, порівнявши їх значення з допустимим значенням кута закручування. В разі потреби відшукати розміри поперечних перерізів стержня з умови жорсткості. Варіанти розрахункових схем наведені в додатку 3.2, а чисельні дані – в таблиці ДЗ.2.

3.4.2. Порядок виконання завдання

Задача 1. Для статично визначуваного валу, який навантажено крутними моментами, з умови міцності та жорсткості визначити розміри поперечного перерізу**.**

1. Виписати для заданого варіанту чисельні дані. В певному масштабі накреслити схему заданої системи з зазначенням її лінійних розмірів і зовнішніх навантажень.

2. Визначити значення зовнішніх крутних моментів на шківах.

3. Побудувати для заданої схеми епюри крутних моментів.

4. Визначити діаметр суцільного круглого валу з умови міцності.

5. Розташувати шківи раціонально і для цього випадку побудувати епюру крутних моментів.

6. Визначити розміри поперечного перерізу (діаметри суцільного і трубчастого валів) для раціонального розташування шківів з умов міцності та жорсткості.

7. Обчислити дотичні напруження на різних ділянках валу відповідно зі значеннями епюри крутних моментів і побудувати епюру дотичних напружень для вала круглого перерізу.

8. Порівняти ваги валу для заданої системи і валу при раціональному розташуванні шківів. Також для раціонального розташування шківів порівняти ваги валів суцільного і трубчастого перерізів.

9. Побудувати епюру кутів закручування раціонального суцільного валу.

10.Побудувати епюри дотичних напружень для різних видів поперечних перерізів.

Задача 2. Для статично невизначуваної системи при крученні з умови міцності та жорсткості визначити розміри поперечного перерізу.

1. Для заданого варіанту завдання виписати чисельні дані і в певному масштабі накреслити схему заданої системи з зазначенням лінійних розмірів і зовнішніх навантажень.

2. Встановити ступінь статичної невизначуваності системи.

3. Визначити геометричні характеристики круглого, кільцевого та прямокутного поперечних перерізів через значення параметру d – діаметру круглого перерізу.

4. *Статичний аспект задачі*. Скласти і записати рівняння статики. Замінити початкову систему статично визначуваною системою, уявно відкинувши одну з опор і замінивши її дію крутним моментом.

5. *Геометричний аспект задачі.* Записати рівняння сумісності кутів закручування всіх ділянок стержня − кут повороту правого перерізу відносно лівого перерізу дорівнює нулю.

6. *Фізичний аспект задачі.* Використати закон Гука для запису виразів кутів закручування.

7. Знайти крутні моменти на опорах з рішення системи рівнянь, що складені в п.5, п.6.

8. Побудувати епюру крутних моментів.

9. З умови міцності визначити розміри поперечних перерізів.

10. Побудувати епюри максимальних дотичних напружень для всіх ділянок стержня.

11. Побудувати епюру кутів закручування і зробити перевірку умови жорсткості.

3.4.3. Приклади розв`язання задач

3.4.3.1. Зразок виконання задачі 1

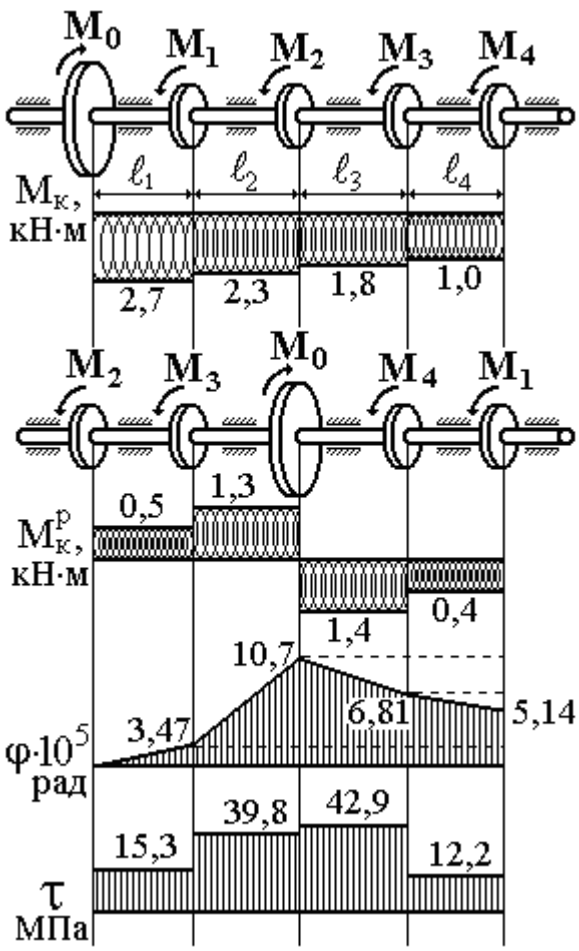


Рисунок 3.14

Потужність, що передається шківами, дорівнює:

$N_1 = 20$ кВт; $N_2 = 25$ кВт;

$N_3 = 40$ кВт; $N_4 = 50$ кВт,

при частоті обертання:

$n = 478$ об / хв.

Довжини ділянок валу:

$\ell_1 = 0{,}5$ м; $\ell_2 = 0{,}4$ м;

$\ell_3 = 0{,}2$ м; $\ell_4 = 0{,}3$ м.

Допустимі дотичні навантаження:

$[\tau] = 50$ МПа.

Допустимий відносний кут закручування: $[\theta] = 2$ град / м.

$$[\theta] = \frac{\pi \cdot 2}{180^0} = 0{,}035 \text{ рад / м};$$

Модуль зсуву –

$G = 0{,}8 \cdot 10^5$ МПа.

Порядок розв`язання задачі:

1. Накреслимо схему вала.

2. Визначимо значення зовнішних крутних моментів згідно відомої з теоретичної механіки залежності $M_{\text{к}} = 9{,}55 \cdot \dfrac{N}{n}$:

$$M_1 = 9{,}55 \cdot \frac{20}{478} \cong 0{,}4 \text{ кНм}; \qquad M_2 = 9{,}55 \cdot \frac{25}{478} \cong 0{,}5 \text{ кНм};$$

$$M_3 = 9{,}55 \cdot \frac{40}{478} \cong 0{,}8 \text{ кНм}; \qquad M_4 = 9{,}55 \cdot \frac{50}{478} \cong 1{,}0 \text{ кНм}.$$

З умови статики:

$$\sum M_z = 0;$$

$$M_0 = M_1 + M_2 + M_3 + M_4 = 0{,}4 + 0{,}5 + 0{,}8 + 1{,}0 = 2{,}7 \text{ кНм}.$$

3. Згідно з методом перерізів будуємо епюру крутних моментів $M_{\text{к}}$.

4. Визначаємо діаметр d валу круглого перерізу з умови міцності на найнебезпечнішій ділянці ℓ_1:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{к}\max}}{W_{\text{P}}} \le [\tau] \quad \Rightarrow$$

$$d \ge \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{\text{к}\max}}{\pi \cdot [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 2{,}7 \cdot 10^3}{3{,}14 \cdot 50 \cdot 10^6}} = 0{,}065 \text{ м} = 65 \text{ мм}.$$

5. З метою зменшення максимального крутного моменту розташуємо шківи раціонально і побудуємо епюру $M_{\text{к}}^{\text{р}}$.

6. Визначаємо розміри поперечного перерізу при раціональному розташуванні шківів:

– з умови міцності:

$$d_{\text{р}}^{\text{міц.}} \ge \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{\text{к}\max}^{\text{р}}}{\pi \cdot [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 1{,}4 \cdot 10^3}{3{,}14 \cdot 50 \cdot 10^6}} = 0{,}0522 \text{ м} \approx 52 \text{ мм};$$

– з умови жорсткості:

$$d_{\text{р}}^{\text{жорс.}} \ge \sqrt[4]{\frac{32 \cdot M_{\text{к}\max}^{\text{р}}}{\pi \cdot G \cdot [\theta]}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 1{,}4 \cdot 10^3}{3{,}14 \cdot 0{,}8 \cdot 10^{11} \cdot 3{,}5 \cdot 10^{-2}}} = 0{,}0475 \text{ м} \approx 48 \text{ мм}.$$

Значення діаметра для суцільного валу обирається найбільше з двох значень з урахуванням стандарту на діаметри валів: $d_{\text{р}} = \max\left\{ d_{\text{р}}^{\text{міц.}};\quad d_{\text{р}}^{\text{жорс.}} \right\}$, тому $d_{\text{р}} = 55$ мм .

В даному прикладі умова міцності виявилась більш строгою, тому діаметр трубчастого валу для раціонального розташування шківів обчислюється при $c = d/D = 0{,}8$ також з умови міцності:

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{\text{к max}}^{\text{р}}}{\pi \cdot [\tau] \cdot \left(1 - c^4\right)}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 1{,}4 \cdot 10^3}{3{,}14 \cdot 50 \cdot 10^6 \cdot \left(1 - 0{,}8^4\right)}} = 0{,}0622 \text{ м} \approx 62 \text{ мм}.$$

Обираємо $D = 65$ мм і обчислюємо максимальні дотичні напруження для трубчастого валу:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{к max}}^{\text{р}}}{W_{\text{р}}} = \frac{16 \cdot 1{,}4 \cdot 10^3}{3{,}14 \cdot 6{,}5^3 \cdot 10^{-6}\left(1 - 0{,}8^4\right)} \approx 44 \text{ МПа}.$$

7. Будуємо епюру максимальних в перерізі дотичних напружень на ділянках валу круглого перерізу, для якого момент опору дорівнює:

$$W_{\text{р}} = \frac{\pi \cdot d_{\text{р}}^3}{16} = \frac{3{,}14 \cdot 0{,}055^3}{16} = 32{,}67 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3, \quad \text{тоді}$$

$$\tau_1 = \frac{M_{\text{к1}}^{\text{р}}}{W_{\text{р}}} = \frac{0{,}5 \cdot 10^3}{32{,}67 \cdot 10^{-6}} = 15{,}3 \cdot 10^6 \text{ Па} = 15{,}3 \text{ МПа};$$

$$\tau_2 = \frac{M_{\text{к2}}^{\text{р}}}{W_{\text{р}}} = \frac{1{,}3 \cdot 10^3}{32{,}67 \cdot 10^{-6}} = 39{,}8 \text{ МПа};$$

$$\tau_3 = \frac{M_{\text{к3}}^{\text{р}}}{W_{\text{р}}} = \frac{-1{,}4 \cdot 10^3}{32{,}76 \cdot 10^{-6}} = -42{,}9 \text{ МПа};$$

$$\tau_4 = \frac{M_{\text{к4}}^{\text{р}}}{W_{\text{р}}} = \frac{-0{,}4 \cdot 10^3}{32{,}67 \cdot 10^{-6}} = -12{,}2 \text{ МПа},$$

Знак дотичних напружень особливого значення не має, тому при побудові епюри τ можливо відкладання ординат по одну сторону осі вала.

8. Співвідношення ваги суцільного валу для заданої системи і ваги суцільного валу при раціональному розташуванні шківів дорівнюється чисельному співвідношенню площин поперечних перерізів:

$$\frac{A}{A_{\text{р}}} = \left(\frac{d}{d_{\text{р}}}\right)^2 = \left(\frac{65}{55}\right)^2 = 1{,}4.$$

Співвідношення ваг суцільного і трубчастого валів дає:

$$\frac{A_{\text{р}}}{A_{\text{р}}^{\text{тр.}}} = \left(\frac{d_{\text{р}}}{D}\right)^2 \cdot \frac{1}{1-c^2} \approx 2.$$

9. Будуємо епюру кутів закручування по ділянках валу:

$$\varphi_1 = \frac{M_{\text{к1}}^{\text{р}} \cdot \ell_1}{G \cdot I_{\text{р}}} = \frac{0{,}5 \cdot 10^3 \cdot 0{,}5}{71{,}9 \cdot 10^5} = 3{,}47 \cdot 10^{-5} \text{ рад};$$

$$\varphi_2 = \frac{M_{\text{к2}}^{\text{р}} \cdot \ell_2}{G \cdot I_{\text{р}}} = \frac{1{,}3 \cdot 10^3 \cdot 0{,}4}{71{,}9 \cdot 10^5} = 7{,}23 \cdot 10^{-5} \text{ рад};$$

$$\varphi_3 = \frac{M_{\text{к3}}^{\text{р}} \cdot \ell_3}{G \cdot I_{\text{р}}} = \frac{-1{,}4 \cdot 10^3 \cdot 0{,}2}{71{,}9 \cdot 10^5} = -3{,}89 \cdot 10^{-5} \text{ рад};$$

$$\varphi_4 = \frac{M_{\text{к4}}^{\text{р}} \cdot \ell_4}{G \cdot I_{\text{р}}} = \frac{-0{,}4 \cdot 10^3 \cdot 0{,}3}{71{,}9 \cdot 10^5} = -1{,}67 \cdot 10^{-5} \text{ рад},$$

де жорсткість при крученні суцільного валу:

$$G \cdot I_{\text{р}} = \frac{0{,}8 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}055^4}{32} = 71{,}9 \cdot 10^5 \text{ Нм}^2,$$

а φ_i (i − номер ділянки) − це кут закручування правого краю ділянки відносно лівого. Обираємо початок координат в лівому перерізі валу. Відкладаємо значення φ_1 в правому перерізі першої ділянки. Кут закручування правого перерізу другої ділянки відносно початку координат дорівнює сумі кутів φ_1 та φ_2. Кут закручування правого перерізу третьої ділянки відносно початку координат дорівнює сумі кутів φ_1, φ_2 та φ_3. І, нарешті,

кут закручування правого перерізу четвертої ділянки відносно початку координат дорівнює сумі кутів φ_1 , φ_2 , φ_3 та φ_4.

Повний кут закручування правого краю валу відносно лівого дорівнює:

$$\varphi_{\Sigma} = \sum_{i=1}^{4} \varphi_i = (3{,}47 + 7{,}23 - 3{,}89 - 1{,}67) \cdot 10^{-5} = 5{,}14 \cdot 10^{-5} \text{ рад} .$$

Найбільший відносний кут закручування:

$$\theta_{\max} = \frac{M_{\text{к}\max}^{\text{р}}}{G \cdot I_{\text{р}}} = \frac{1{,}4 \cdot 10^3}{71{,}9 \cdot 10^5} = 19{,}47 \cdot 10^{-5} \text{ рад/м} << 0{,}035 \text{ рад/м} .$$

Умова жорсткості $\theta_{\max} \le [\theta]$ виконується з великим запасом.

10. Побудуємо епюри дотичних напружень в поперечних перерізах суцільного і трубчастого валів:

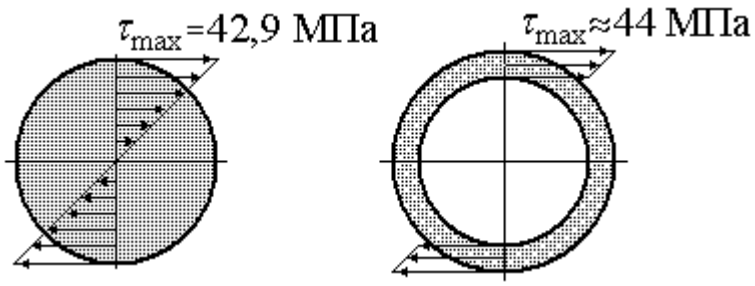


Рисунок 3.15

3.4.3.2. Зразок виконання задачі 2

З умов міцності та жорсткості визначити розміри поперечних перерізів статично невизначуваного стержня з послідовним розташуванням ділянок прямокутного, кільцевого та круглого перерізів (рис. 3.16).

Дано:

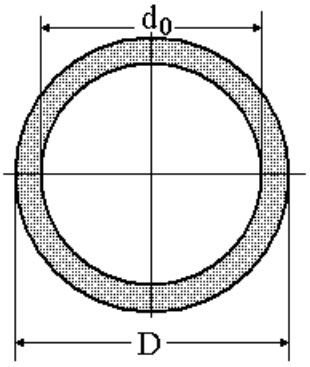
$M_1 = 300$ Нм; $M_2 = 400$ Нм; $M_3 = 500$ Нм;

$\ell_1 = 0{,}2$ м; $\ell_2 = 1{,}0$ м; $\ell_3 = 1{,}5$ м; $k_1 = 1{,}3$; $k_2 = 1{,}6$;

$G = 0{,}8 \cdot 10^5$ МПа; $[\tau] = 40$ МПа; $[\theta] = 2$ град/м $= 3{,}5 \cdot 10^{-2}$ рад/м .

1. Визначимо геометричні характеристики поперечних перерізів ділянок стержня:

– кільцевий переріз:



d_0 – внутрішній діаметр; D – зовнішній діаметр;

$$c = {\mathrm{d}_0}/{\mathrm{D}} = {k_1}/{k_2} = {1{,}3}/{1{,}6} = 0{,}8125.$$

Полярний момент інерції:

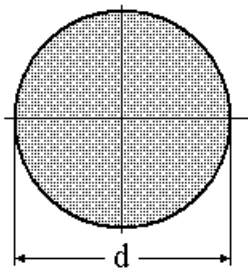
$$I_{\text{ркц}} = \frac{\pi \cdot D^4\left(1 - c^4\right)}{32} = \frac{\pi \cdot k_2^4 \cdot d^4\left(1 - c^4\right)}{32} =$$

$$= 0{,}363 d^4.$$

Полярний момент опору:

$$W_{\text{ркц}} = \frac{\pi \cdot D^3\left(1 - c^4\right)}{16} = \frac{\pi \cdot k_2^3 \cdot d^3\left(1 - c^4\right)}{16} = 0{,}453 d^3.$$

– круглий переріз:



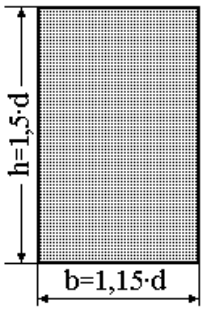
Полярний момент інерції:

$$I_{\text{рк}} = \frac{\pi \cdot d^4}{32} = 0{,}098 \cdot d^4.$$

Полярний момент опору:

$$W_{\text{рк}} = \frac{\pi \cdot d^3}{16} = 0{,}196 \cdot d^3.$$

– прямокутний переріз: $h = 1{,}5 \cdot d$; $b = \dfrac{h}{k_1} = \dfrac{1{,}5 \cdot d}{1{,}3} = 1{,}15 \cdot d$.



Момент інерції при крученні: $I_{\text{к}} = \beta \cdot h \cdot b^3$, $\beta = 0{,}177$ залежить від співвідношення сторін прямокутника $\dfrac{h}{b} = 1{,}3$; (див. табл. 3.1).

$$I_{\text{к}} = 0{,}177 \cdot 1{,}5 \cdot d \cdot 1{,}15^3 \cdot d^3 = 0{,}404 \cdot d^4.$$

Момент опору при крученні ($\alpha = 0{,}223$, див. табл. 3.1)

$$W_{\text{к}} = \alpha \cdot h \cdot b^2 = 0{,}223 \cdot 1{,}5 \cdot d \cdot 1{,}15^2 \cdot d^2 = 0{,}442 \cdot d^3.$$

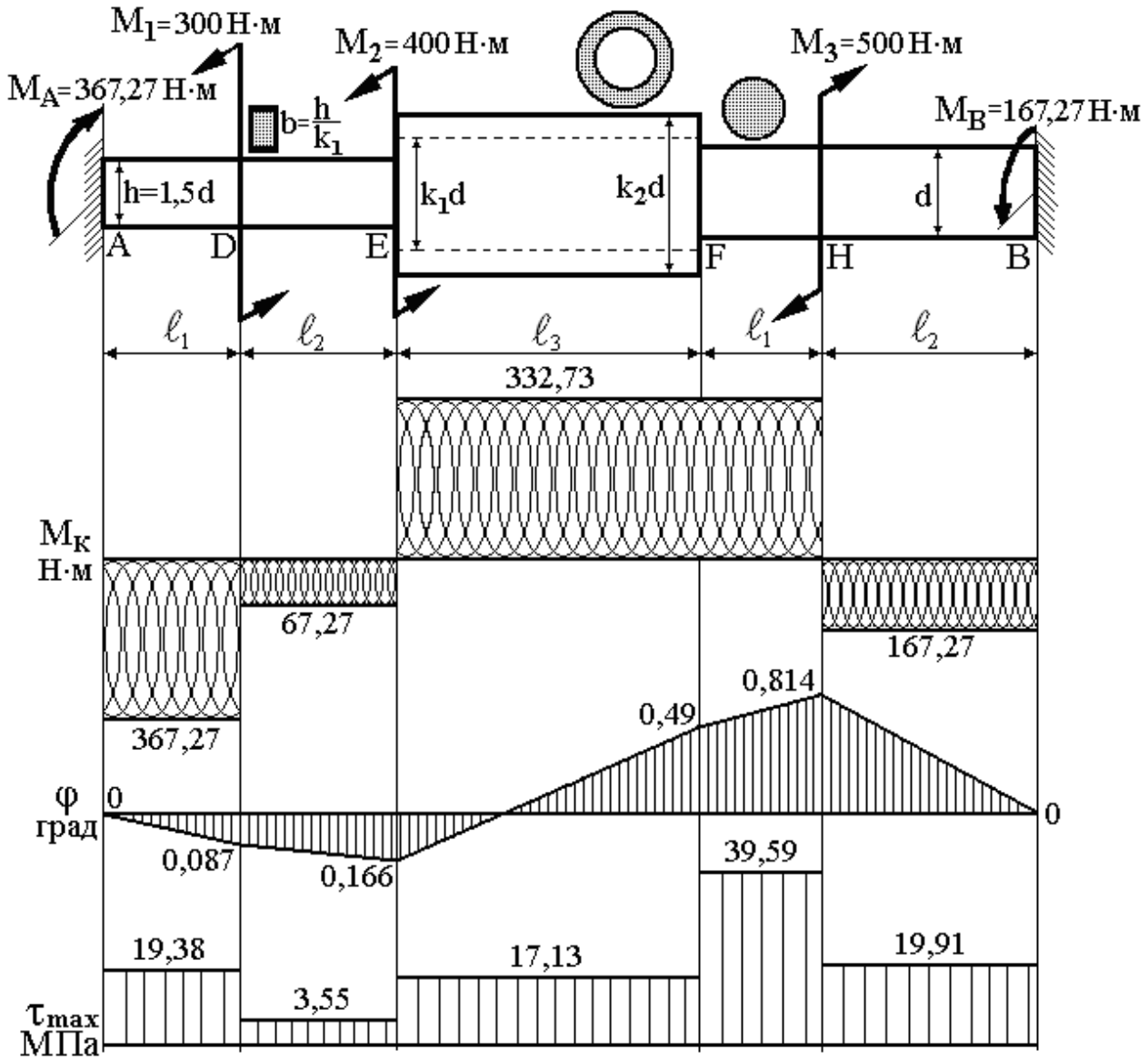


Рисунок 3.16

2. Розкриємо статичну невизначуваність задачі.

При даному типі навантаження в місцях закріплення вала виникають два реактивні моменти M_{A} та M_{B} в площинах, перпендикулярних до осі стержня. Ступінь статичної невизначуваності $n = 2 - 1$ дорівнює одиниці, тому задача є один раз статично невизначувана.

Статичний аспект задачі:

З умови рівноваги вала:

$$\sum_{i=1}^{5} M_{zi} = 0; \quad -M_{\text{A}} + M_1 + M_2 - M_3 + M_{\text{B}} = 0. \qquad (3.17)$$

Геометричний аспект задачі:

Заміняємо початкову статично невизначувану задачу на статично визначувану, умовно відкидая ліву опору. На підставі принципу незалежності дії сил абсолютний кут закручування лівого краю стержня відносно нерухомого правого дорівнює алгебраїчній сумі кутів закручування від кожного зовнішнього моменту:

$$\varphi_{AB} = \varphi_{AB}(M_A) + \varphi_{AB}(M_1) + \varphi_{AB}(M_2) + \varphi_{AB}(M_3)$$

Оскільки обидва кінці валу жорстко закріплені, то кут повороту переріза A відносно B дорівнює нулю (рівняння сумісності кутів закручування):

$$\varphi_{AB} = 0. \tag{3.18}$$

Фізичний аспект задачі:

Використовуючи формулу закону Гука, запишемо вирази для кутів закручування:

$$\begin{aligned}
&\varphi_{AB}(M_A) = -\frac{M_A \cdot (\ell_1 + \ell_2)}{G \cdot I_{\text{к}}} - \frac{M_A \cdot \ell_3}{G \cdot I_{\text{ркц}}} - \frac{M_A \cdot (\ell_1 + \ell_2)}{G \cdot I_{\text{рк}}};\\
&\varphi_{AB}(M_1) = \frac{M_1 \cdot \ell_2}{G \cdot I_{\text{к}}} + \frac{M_1 \cdot \ell_3}{G \cdot I_{\text{ркц}}} + \frac{M_1 \cdot (\ell_1 + \ell_2)}{G \cdot I_{\text{рк}}};\\
&\varphi_{AB}(M_2) = \frac{M_2 \cdot \ell_3}{G \cdot I_{\text{ркц}}} + \frac{M_2 \cdot (\ell_1 + \ell_2)}{G \cdot I_{\text{рк}}};\\
&\varphi_{BA}(M_3) = -\frac{M_3 \cdot \ell_2}{G \cdot I_{\text{рк}}}.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Якщо підставити вирази (3.19) у вираз (3.18), то матимемо:

$$\begin{aligned}
&-M_{\text{A}} \cdot \left(\frac{\ell_1 + \ell_2}{I_{\text{к}}} + \frac{\ell_3}{I_{\text{ркц}}} + \frac{\ell_1 + \ell_2}{I_{\text{рк}}} \right) + M_1 \cdot \left(\frac{\ell_2}{I_{\text{к}}} + \frac{\ell_3}{I_{\text{ркц}}} + \frac{\ell_1 + \ell_2}{I_{\text{рк}}} \right) +\\
&+ M_2 \cdot \left(\frac{\ell_3}{I_{\text{ркц}}} + \frac{\ell_1 + \ell_2}{I_{\text{рк}}} \right) - M_3 \left(\frac{\ell_2}{I_{\text{рк}}} \right) = 0.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Із рівняння (3.20) знаходимо значення M_A.

$$-M_{\text{A}}\cdot\left(\frac{1{,}2}{0{,}404\cdot d^4}+\frac{1{,}5}{0{,}363\cdot d^4}+\frac{1{,}2}{0{,}098\cdot d^4}\right)+$$

$$+M_1\cdot\left(\frac{1{,}0}{0{,}404\cdot d^4}+\frac{1{,}5}{0{,}363\cdot d^4}+\frac{1{,}2}{0{,}098\cdot d^4}\right)+$$

$$+M_2\cdot\left(\frac{1{,}5}{0{,}363\cdot d^4}+\frac{1{,}2}{0{,}098\cdot d^4}\right)-M_3\cdot\frac{1{,}0}{0{,}098\cdot d^4}=0;$$

$$M_{\text{A}}=367{,}27\ \text{Нм}.$$

З рівняння рівноваги (3.17) знаходимо значення реактивного моменту M_{B}:

$$M_{\text{B}}=-M_1-M_2+M_3+M_{\text{A}}=$$
$$=-300-400+500+367{,}27=167{,}27\ \text{Нм}.$$

3. Будуємо епюру крутних моментів (рис. 3.16).

4. Визначаємо значення параметру d для заданих форм поперечних перерізів стержня з умови міцності:

$$\tau_{\max}=\frac{M_{\text{к}}}{W_i}\le[\tau];$$

для кільцевого перерізу з епюри крутного моменту (рис. 3.16) $M_{\text{к}}=332{,}73\ \text{Нм}$, тоді

$$d\ge\sqrt[3]{\frac{M_{\text{к}}}{0{,}453\cdot[\tau]}}=\sqrt[3]{\frac{332{,}73}{0{,}453\cdot 40\cdot 10^6}}=2{,}638\cdot 10^{-2}\ \text{м};$$

для круглого перерізу ($M_{\text{к}\max}=332{,}73\ \text{Нм}$)

$$d\ge\sqrt[3]{\frac{\text{M}_{\text{к}\max}}{0{,}196\cdot[\tau]}}=\sqrt[3]{\frac{332{,}73}{0{,}196\cdot 40\cdot 10^6}}=3{,}488\cdot 10^{-2}\ \text{м};$$

для прямокутного перерізу ($M_{\text{к max}}=367{,}27\ \text{Нм}$)

$$d\ge\sqrt[3]{\frac{\text{M}_{\text{к max}}}{0{,}442\cdot[\tau]}}=\sqrt[3]{\frac{367{,}27}{0{,}442\cdot 40\cdot 10^6}}=2{,}749\cdot 10^{-2}\ \text{м}.$$

З трьох отриманих результатів слід вибирати більший: $d = 35$мм, який знайдено з умови міцності для круглого перерізу.

5. Будуємо епюру розподілу максимальних дотичних напружень по довжині стержня: для круглого перерізу

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{к}}}{W_{\text{р}}} = \frac{332{,}73}{0{,}196 \cdot 3{,}5^3 \cdot 10^{-6}} = 39{,}59 \cdot 10^6 \text{ Па} = 39{,}59 \text{ МПа};$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{к}}}{W_{\text{р}}} = \frac{167{,}27}{0{,}196 \cdot 3{,}5^3 \cdot 10^{-6}} = 19{,}91 \text{ МПа};$$

для кільцевого перерізу

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{к}}}{W_{\text{р кц}}} = \frac{332{,}73}{0{,}453 \cdot 3{,}5^3 \cdot 10^{-6}} = 17{,}13 \text{ МПа};$$

для прямокутного перерізу

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{к}}}{W_{\text{к}}} = \frac{367{,}27}{0{,}442 \cdot 3{,}5^3 \cdot 10^{-6}} = 19{,}38 \text{ МПа};$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{к}}}{W_{\text{к}}} = \frac{67{,}27}{0{,}442 \cdot 3{,}5^3 \cdot 10^{-6}} = 3{,}55 \text{ МПа};$$

6. Побудуємо епюру кутів закручування.

Послідовно для частин стержня знаходимо значення кутів закручування.

$$\varphi_{\text{AD}} = \frac{M_{\text{к}}^{\text{AD}} \cdot l_1}{G \cdot I_{\text{к}}} = \frac{-367{,}27 \cdot 0{,}2}{0{,}8 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 0{,}404 \cdot 3{,}5^4 \cdot 10^{-8}} =$$

$$= -1{,}515 \cdot 10^{-3} \text{рад} = -0{,}087 \text{ град}.$$

$$\varphi_{\text{DE}} = \frac{M_{\text{к}}^{\text{DE}} \cdot l_2}{G \cdot I_{\text{к}}} = \frac{-67{,}27 \cdot 1{,}0}{0{,}8 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 0{,}404 \cdot 3{,}5^4 \cdot 10^{-8}} =$$

$$= -1{,}387 \cdot 10^{-3} \text{рад} = -0{,}079 \text{ град}.$$

$$\varphi_{\text{EF}} = \frac{M_{\text{к}}^{\text{EF}} \cdot l_3}{G \cdot I_{\text{р кц}}} = \frac{332{,}73 \cdot 1{,}5}{0{,}8 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 0{,}363 \cdot 3{,}5^4 \cdot 10^{-8}} =$$

$$= 11{,}453 \cdot 10^{-3} \text{рад} = 0{,}656 \text{ град}.$$

$$\varphi_{\text{FH}} = \frac{M_{\text{к}}^{\text{FH}} \cdot l_1}{G \cdot I_{\text{рк}}} = \frac{332{,}73 \cdot 0{,}2}{0{,}8 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 0{,}098 \cdot 3{,}5^4 \cdot 10^{-8}} =$$

$$= 5{,}656 \cdot 10^{-3} \text{рад} = 0{,}324 \text{ град}.$$

$$\varphi_{\text{HB}} = \frac{M_{\text{к}}^{\text{HB}} \cdot l_2}{G \cdot I_{\text{рк}}} = \frac{-167{,}27 \cdot 1{,}0}{0{,}8 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 0{,}098 \cdot 3{,}5^4 \cdot 10^{-8}} =$$

$$= -14{,}218 \cdot 10^{-3} \text{рад} = -0{,}815 \text{ град}.$$

Перевіримо виконання умови жорсткості для найнебезпечнішої ділянки FH круглого перерізу, де відносний кут закручування дорівнює:

$$\theta_{\max} = \theta_{\text{FH}} = \frac{5{,}656 \cdot 10^{-3}}{0{,}2} = 2{,}8 \cdot 10^{-2} \left[\frac{\text{рад}}{\text{м}}\right] \le [\theta] = 3{,}5 \cdot 10^{-2} \left[\frac{\text{рад}}{\text{м}}\right].$$

Умова жорсткості виконана.

Встановимо початок координат у перерізі А та будуємо епюру кутів закручування для деформаційної перевірки: $\varphi_{\text{AD}} = -0{,}087$ град;

$$\varphi_{\text{AE}} = \varphi_{\text{AD}} + \varphi_{\text{DE}} = -0{,}087 - 0{,}079 = -0{,}166 \text{ град};$$
$$\varphi_{\text{AF}} = \varphi_{\text{AE}} + \varphi_{\text{EF}} = -0{,}166 + 0{,}656 = 0{,}49 \text{ град};$$
$$\varphi_{\text{AH}} = \varphi_{\text{AF}} + \varphi_{\text{FH}} = 0{,}49 + 0{,}324 = 0{,}814 \text{ град};$$
$$\varphi_{\text{AB}} = \varphi_{\text{AH}} + \varphi_{\text{HB}} = 0{,}814 - 0{,}815 = -0{,}001 \approx 0.$$

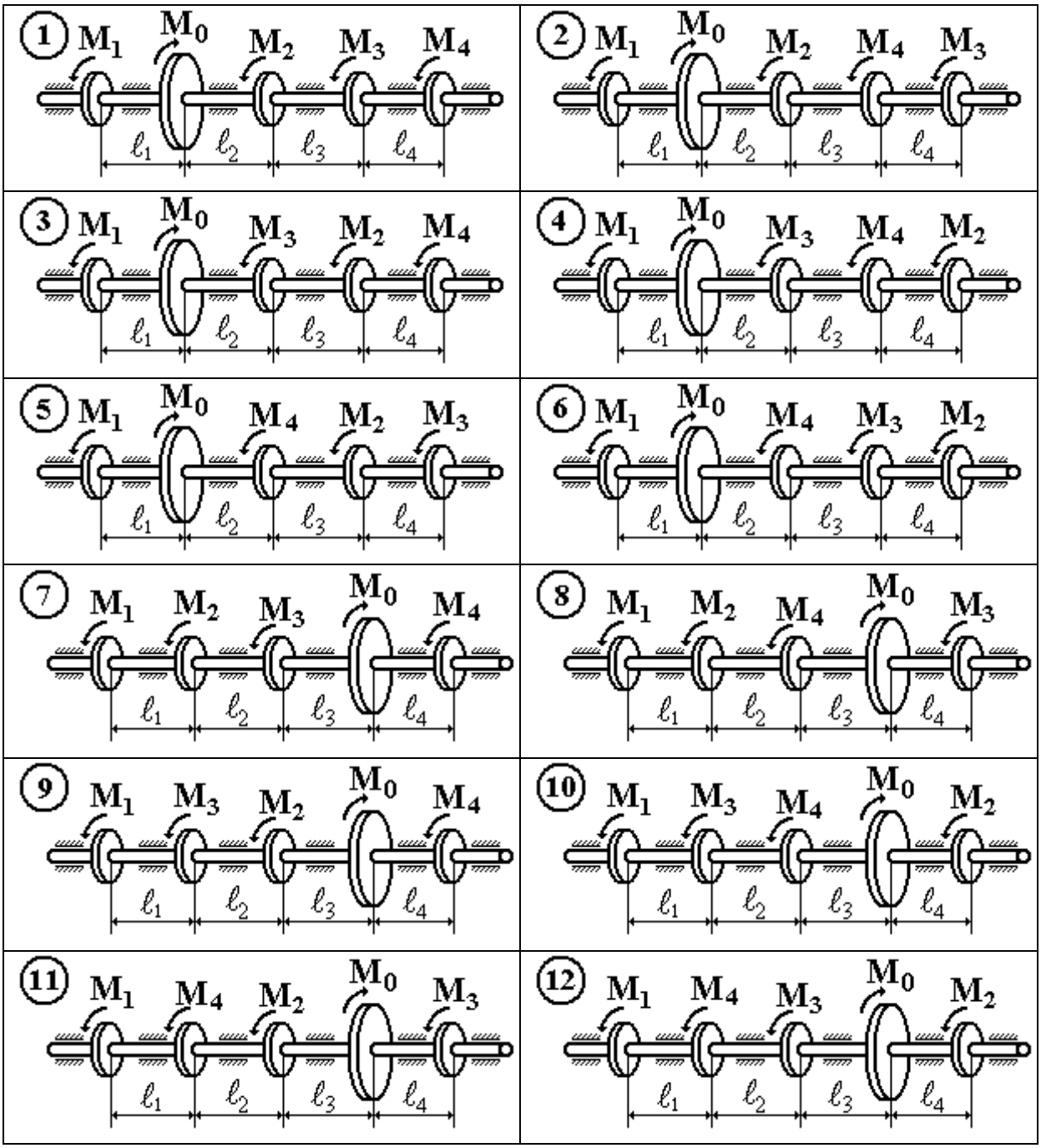
Абсолютний кут закручування перерізу A відносно перерізу B повинен дорівнювати нулю. Але отримана абсолютна похибка (0,001) є результатом накопичення округлення на кожному етапі рішення задачі. Тому визначимо відносну похибку обчислень П та порівняємо з її допустимим значенням:

$$\Pi = \frac{|0{,}814 - 0{,}815|}{0{,}815} \cdot 100\% = 0{,}12\% << 5\%,$$

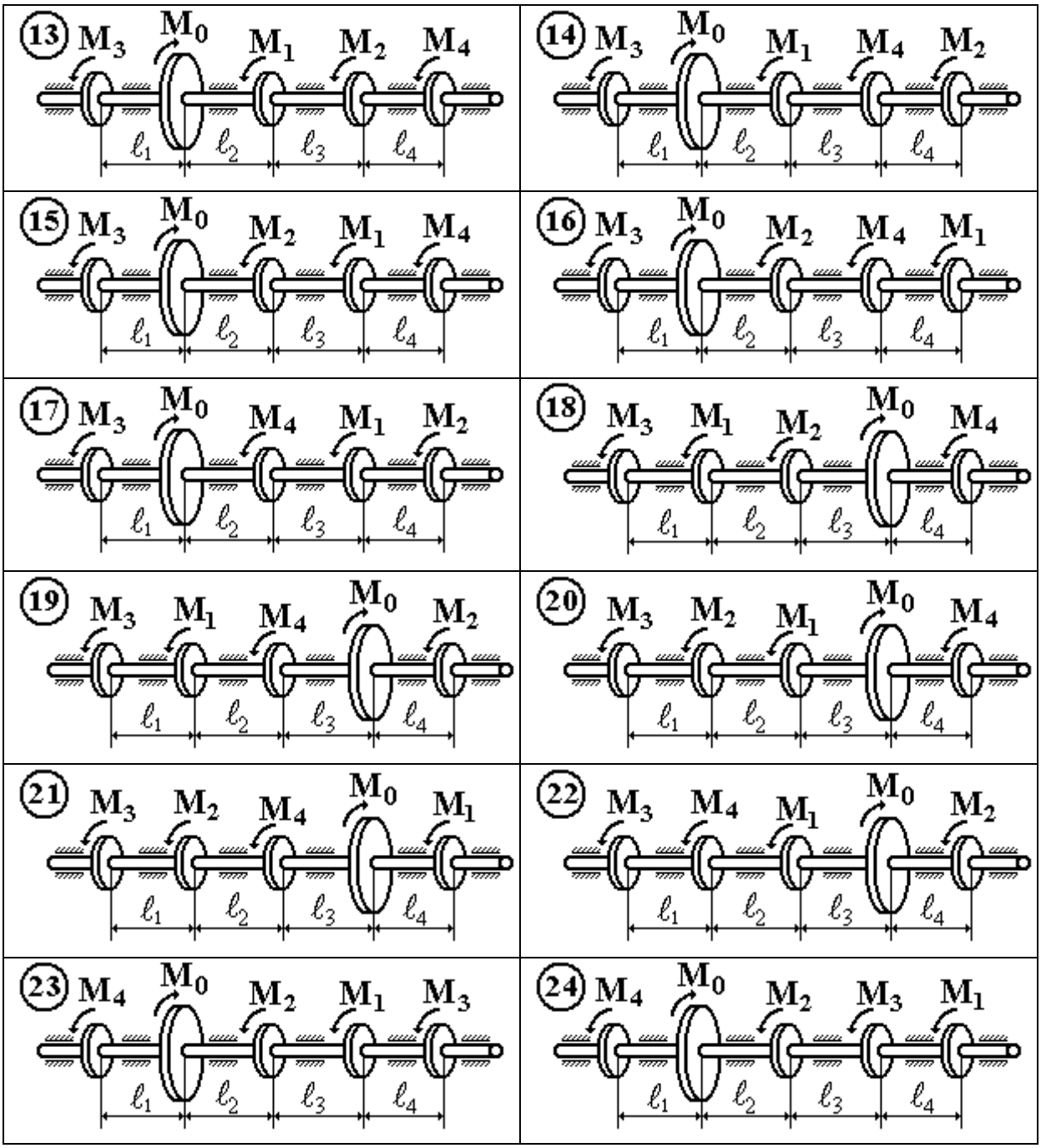
що свідчить про точність отриманих результатів та правильність рішення статично невизначуваної задачі.

3.4.4. Розрахункові схеми та чисельні дані

Додаток 3.1 − Задача 1. Статично визначуваний вал



Продовження додатка 3.1

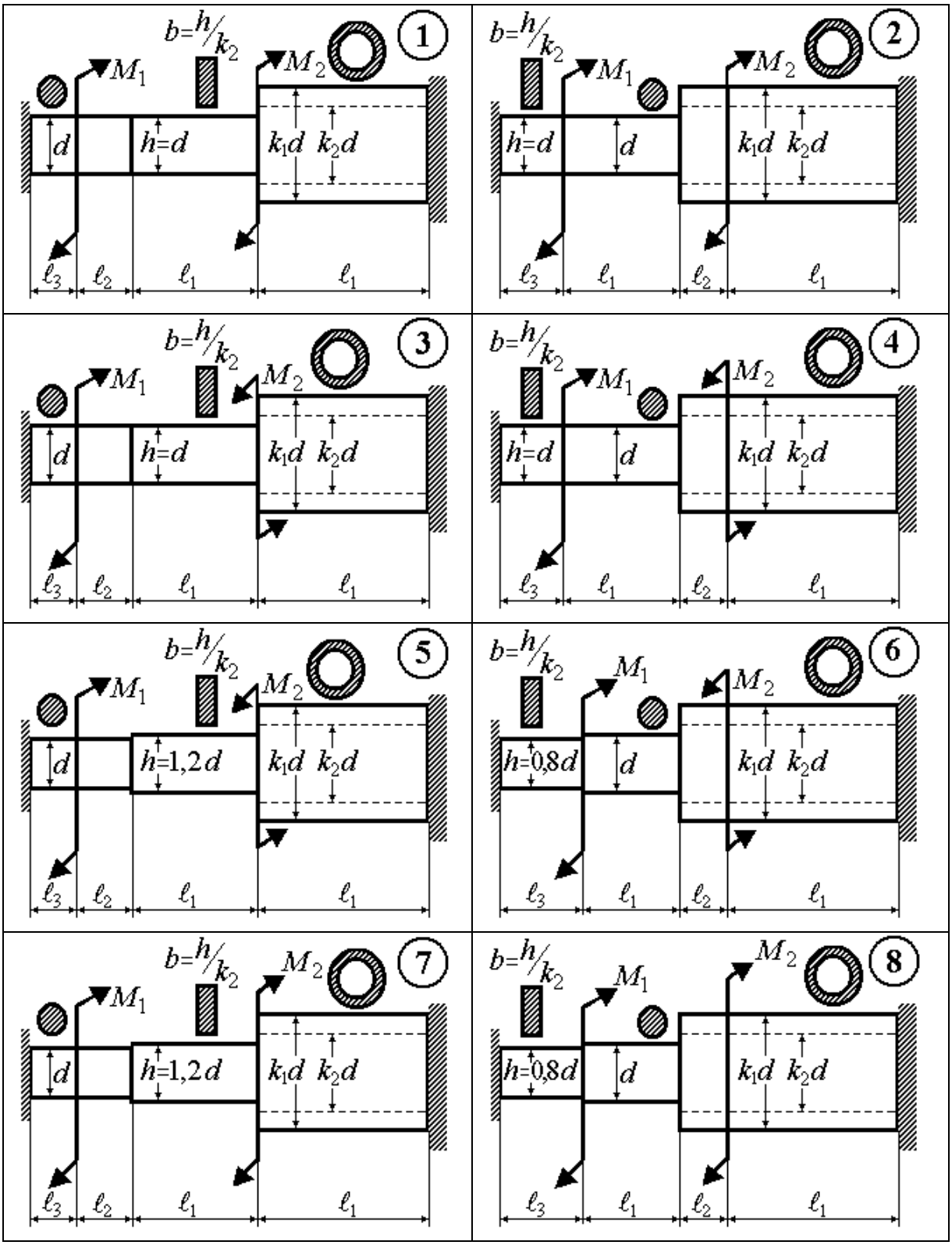


Таблиця Д3.1 − Вхідні дані до задачі 1

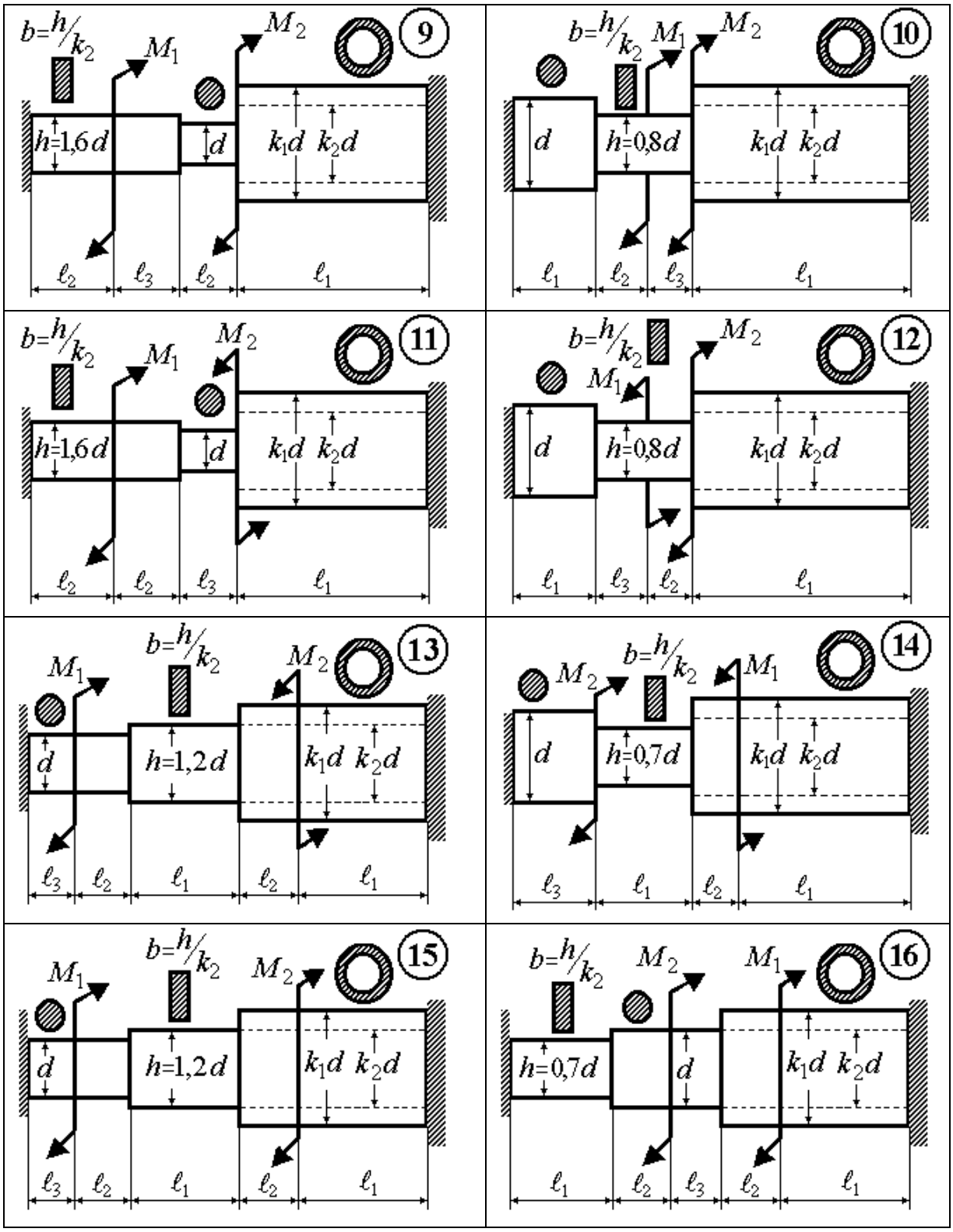
№ вар.	N_1 кВт	N_2 кВт	N_3 кВт	N_4 кВт	ℓ_1 м	ℓ_2 м	ℓ_3 м	ℓ_4 м	n об/хв.	$[\tau]$ МПа	$[\theta]$ град/м
1.	2,0	3,5	2,8	2,2	0,5	0,2	0,6	0,2	238	28	2,0
2.	2,5	3,2	3,0	2,8	0,1	0,4	0,4	0,6	286	32	1,8
3.	2,8	3,0	3,5	2,2	0,3	0,6	0,8	0,4	334	40	1,9
4.	3,0	2,8	2,2	3,5	0,5	0,5	0,6	0,4	382	35	1,7
5.	3,2	2,5	2,5	2,8	0,1	0,3	0,4	0,2	248	32	2,1
6.	3,5	2,0	2,5	3,0	0,2	0,4	0,5	0,1	267	40	2,2
7.	4,0	2,2	3,8	2,5	0,5	0,2	0,4	0,1	382	32	2,0
8.	2,5	3,8	2,2	4,0	0,4	0,3	0,5	0,2	477	40	2,2
9.	2,8	2,6	3,4	3,2	0,3	0,6	0,2	0,4	382	45	2,0
10.	3,5	3,4	2,6	2,2	0,4	0,5	0,1	0,2	430	32	1,8
11.	3,4	2,6	3,5	2,5	0,2	0,3	0,5	0,5	450	40	2,2
12.	2,5	2,2	3,8	4,2	0,5	0,1	0,2	0,6	477	35	2,1
13.	3,5	4,0	2,0	2,5	0,6	0,2	0,3	0,5	572	45	2,0
14.	4,0	3,5	2,2	2,8	0,4	0,2	0,3	0,1	667	32	1,9
15.	4,2	3,8	2,5	2,5	0,1	0,3	0,2	0,4	765	40	2,1
16.	3,8	3,2	2,4	2,6	0,2	0,5	0,4	0,1	572	35	2,0
17.	3,2	2,8	3,5	2,5	0,5	0,2	0,3	0,6	382	32	2,2
18.	2,5	3,5	3,2	2,8	0,6	0,3	0,4	0,5	286	40	1,8
19.	3,5	3,5	4,2	2,8	0,4	0,2	0,3	0,5	248	45	1,8
20.	2,5	4,0	2,0	3,5	0,5	0,6	0,2	0,3	430	50	2,0
21.	3,0	2,8	3,2	2,0	0,1	0,3	0,6	0,2	382	40	2,2
22.	2,5	3,5	4,0	2,0	0,3	0,2	0,5	0,5	477	35	2,0
23.	2,0	3,0	3,0	4,0	0,5	0,5	0,3	0,2	450	40	1,8
24.	2,5	3,0	2,8	3,2	0,4	0,5	0,3	0,2	475	45	2,0

Примітка. Модуль зсуву матеріалу стержня – $G = 0{,}8 \cdot 10^5$ МПа

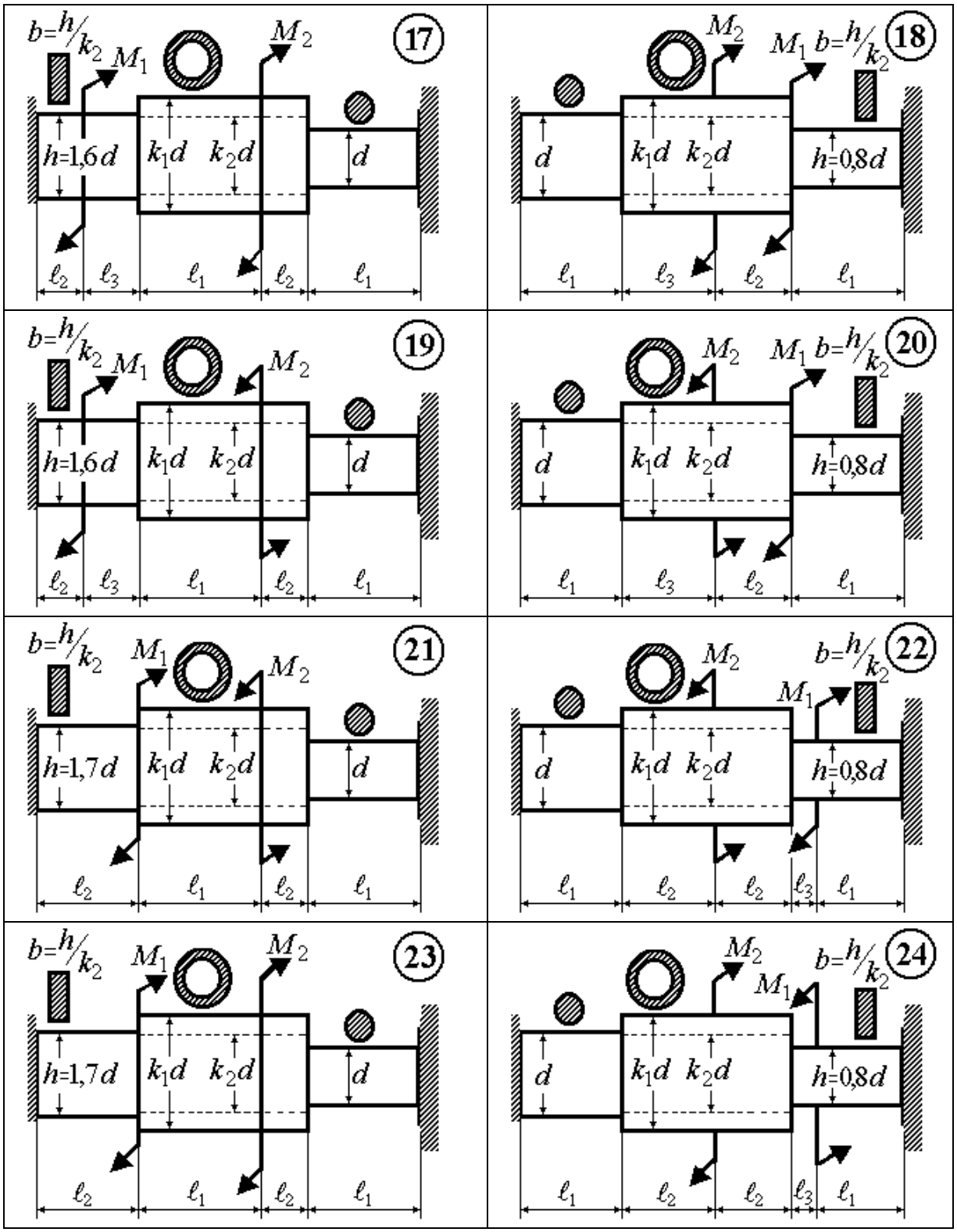
Додаток 3.2 − Задача 2. Статично невизначуваний стержень



Продовження додатка 3.2.



Продовження додатка 3.2.



Таблиця Д3.2 − Вхідні дані до задачі 2

№ вар	ℓ_1 м	ℓ_2 м	ℓ_3 м	k_1	k_2	M_1 Нм	M_2 Нм	$[\tau]$ МПа	$[\theta]$ град/м
1.	1,5	1,0	0,3	1,3	1,2	200	400	40	2,0
2.	1,4	0,9	0,4	1,5	1,4	210	300	48	1,8
3.	1,6	1,1	0,5	1,4	1,2	280	450	45	2,2
4.	1,8	1,0	0,4	1,5	1,0	300	500	50	2,0
5.	1,5	0,9	0,4	1,6	1,2	250	350	30	1,8
6.	1,2	0,8	0,3	1,2	1,1	300	400	40	1,8
7.	1,1	0,5	0,2	1,3	1,1	450	500	50	2,2
8.	1,4	0,5	0,1	1,4	1,2	480	500	45	2,0
9.	1,6	1,1	0,5	1,3	1,2	300	400	40	1,8
10.	1,2	0,7	0,2	1,3	1,1	250	300	35	2,0
11.	1,5	0,8	0,3	1,2	1,0	350	400	40	2,2
12.	1,6	1,0	0,5	1,5	1,2	400	450	50	2,2
13.	1,2	0,8	0,5	1,6	1,4	450	500	45	2,0
14.	1,5	0,5	0,5	1,8	1,4	350	400	40	1,8
15.	1,3	0,6	0,2	1,2	1,1	280	350	30	2,0
16.	1,4	0,8	0,4	1,3	1,1	200	350	35	1,8
17.	1,3	0,7	0,4	1,4	1,2	300	400	50	2,4
18.	1,2	0,5	0,2	1,5	1,3	350	500	52	2,2
19.	1,0	0,5	0,2	1,6	1,4	200	350	40	1,8
20.	1,5	1,0	0,5	1,5	1,1	300	400	50	1,8
21.	1,6	1,4	1,0	1,6	1,5	250	450	40	2,0
22.	1,1	0,5	0,1	1,4	1,1	300	450	35	1,8
23.	1,2	0,8	0,3	1,2	1,1	250	450	40	2,0
24.	1,1	1,0	0,5	1,6	1,2	350	400	50	2,2

Примітка. Модуль зсуву матеріалу стержня – $G = 0{,}8 \cdot 10^5$ МПа

Додаток 3.3 − Основні поняття, позначення, формули, формулювання та правила з теми «Кручення»

Позначення та формули	Одиниця виміру	Назва
φ	рад (радіан)	абсолютний кут закручування
$\theta = \mathrm{d}\varphi / \mathrm{d}z$	рад/м ((радіан/метр)	відносний кут закручування
$\gamma = \rho \cdot \theta$	рад (радіан)	відносний зсув (кут зсуву)
ρ	м(метр)	радіус
$M_{\text{к}} = \sum M_{\text{кі}}$	Н·м (ньютон · метр)	внутрішній крутний момент
$\tau = \dfrac{M_{\text{к}}}{I_\rho} \cdot \rho$	Па (паскаль)	дотичне напруження
$I_\rho = \int\limits_A \rho^2 dA$	$м^4$	полярний момент інерції
$\tau = G \cdot \gamma$	Па (паскаль)	закон Гука при зсуві
G	Па (паскаль)	модуль зсуву
$\tau_{\max} = \dfrac{M_{\text{к}}}{W_\rho} \le [\tau]$	Па (паскаль)	умова міцності при крученні
$W_\rho = \dfrac{I_\rho}{\rho_{\max}}$	$м^3$	полярний момент опору
$\varphi = \dfrac{M_{\text{к}} \cdot \ell}{G \cdot I_\rho} \le [\varphi]$	рад (радіан)	умова жорсткості для абсолютного кута закручування
$\theta = \dfrac{M_{\text{к}}}{G \cdot I_\rho} \le [\theta]$	рад/м (радіан/метр)	умова жорсткості для відносного кута закручування

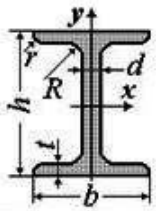
Внутрішній крутний момент $M_{\text{к}}(z)$ у даному перерізі чисельно дорівнює алгебраїчній сумі зовнішніх крутних моментів, що розташовані по один бік від перерізу.

Правило знаків: Зовнішній крутний момент вважається додатним, якщо при спостеріганні з боку перерізу вздовж осі вала він намагається обертати відсічену частину проти годинникової стрілки.

Контрольні питання

1. Що називається крученням?
2. Які внутрішні силові фактори мають місце при крученні?
3. Які деформації та напруження виникають у поперечному перерізі вала?
4. Гіпотези, які використовуються при розгляданні кручення?
5. За якою формулою обчислюються дотичні напруження при крученні?
6. У яких точках круглого перерізу виникають максимальні дотичні напруження?
7. Умова міцності при крученні.
8. Як визначити абсолютний та відносний кути закручування вала?
9. Що таке жорсткість валу при крученні?
10. Умова жорсткості при крученні?
11. Які геометричні характеристики використовуються при крученні валів некруглих перерізів?
12. Де дотичні напруження досягають найбільшого значення при крученні валу прямокутного поперечного перерізу?
13. Які системи називаються статично невизначуваними?
14. В якому порядку виконується розрахунок статично невизначуваних систем (методика розрахунку) при крученні?
15. В чому полягає деформаційна перевірка правильності рішення статично невизначуваної задачі при крученні?

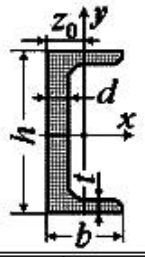
Додаток 4 – Таблиці сортаментів прокатних профілів



Позначення:
h – висота балки;
b – ширина полиці;
d – товщина стінки;
t – середня товщина полиці;

Балки двотаврові (ГОСТ 8239–89)
I – момент інерції;
W – момент опору;
i – радіус інерції;
S – статичний момент півперерізу.

Номер профілю	Розміри, мм				Площа перерізу, A, см^2	I_x, см^4	W_x, см^3	i_x, см	S_x, см^3	I_y, см^4	W_y, см^3	i_y, см	Маса 1 м, кг.
	h	b	d	t									
10	100	55	4,5	7,2	12,0	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22	9,46
12	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38	11,5
14	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55	13,7
16	160	81	5,0	7,8	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70	15,9
18	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88	18,4
18a	180	100	5,1	8,3	25,4	1430	159	7,51	89,8	114	22,8	2,12	19,9
20	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07	21,0
20a	200	110	5,2	8,6	28,9	2030	203	8,37	114	155	28,2	2,32	22,7
22	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27	24,0
22a	220	120	5,4	8,9	32,8	2790	254	9,22	143	203	34,3	2,50	25,8
24	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37	27,3
24a	240	125	5,6	9,8	37,5	3800	317	10,1	178	260	41,6	2,63	29,4
27	270	125	6,0	9,8	40,2	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54	31,5
27a	270	135	6,0	10,2	43,2	5500	407	11,3	229	337	50,0	2,80	33,9
30	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69	36,5
30a	300	145	6,5	10,7	49,9	7780	518	12,5	292	436	60,1	2,95	39,2
33	330	140	7,0	11,2	53,8	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79	42,2
36	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89	48,6
40	400	155	8,3	13,0	72,6	19062	953	16,2	545	667	86,1	3,03	57,0
45	450	160	9	14,2	84,7	27696	1231	18,1	708	808	101	3,09	66,5
50	500	170	10	15,2	100	39727	1589	19,9	919	1043	123	3,23	78,5



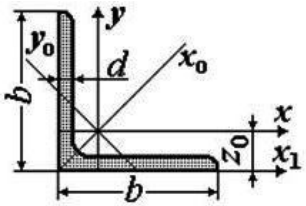
Позначення:
h – висота балки;
b – ширина полиці;
d – товщина стінки;
t – середня товщина полиці;

Швелери (ГОСТ 8240–89)

I – момент інерції;
W – момент опору;
i – радіус інерції;
S – статичний момент півперерізу;
z_0 – відстань від осі y до зовнішньої грані стінки.

Номер профілю	Розміри, мм				Площа перерізу, A, см^2	I_x, см^4	W_x, см^3	i_x, см	S_x, см^3	I_y, см^4	W_y, см^3	i_y, см	z_0, см	Маса 1 м, кг.
	h	b	d	t										
5	50	32	4,4	7,0	6,16	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,954	1,16	4,84
6,5	65	36	4,4	7,2	7,51	48,6	15,0	2,54	9,0	8,7	3,68	1,08	1,24	5,90
8	80	40	4,5	7,4	8,98	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31	7,05
10	100	46	4,5	7,6	10,9	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44	8,59
12	120	52	4,8	7,8	13,3	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54	10,4
14	140	58	4,9	8,1	15,6	491	70,2	5,60	40,8	45,4	11,0	1,70	1,67	12,3
14а	140	62	4,9	8,7	17,0	545	77,8	5,66	45,1	57,5	13,3	1,84	1,87	13,3
16	160	64	5,0	8,4	18,1	747	93,4	6,42	54,1	63,6	13,8	1,87	1,80	14,2
16а	160	68	5,0	9,0	19,5	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2,00	15,3
18	180	70	5,1	8,7	20,7	1090	121	7,24	69,8	86	17,0	2,04	1,94	16,3
18а	180	74	5,1	9,3	22,2	1190	132	7,32	76,1	105	20,0	2,18	2,13	17,4
20	200	76	5,2	9,0	23,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,20	2,07	18,4
20а	200	80	5,2	9,7	25,2	1670	167	8,15	95,9	139	24,2	2,35	2,28	19,8
22	220	82	5,4	9,5	26,7	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21	21,0
22а	220	87	5,4	10,2	28,8	2330	212	8,99	121	187	30,0	2,55	2,46	22,6
24	240	90	5,6	10,0	30,6	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,60	2,42	24,0
24а	240	95	5,6	10,7	32,9	3180	265	9,84	151	254	37,2	2,78	2,67	25,8
27	270	95	6,0	10,5	35,2	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47	27,7
30	300	100	6,5	11,0	40,5	5810	387	12,0	224	327	43,6	2,84	2,52	31,8
33	330	105	7,0	11,7	46,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59	36,5
36	360	110	7,5	12,6	53,4	10820	601	14,2	350	513	61,7	3,10	2,68	41,9
40	400	115	8,0	13,5	61,5	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75	48,3

Продовження додатка 4



Позначення:
b – ширина полиці;
d – товщина полиці;

Кутники рівнобокі (ГОСТ 8509–86)

I – момент інерції;
i – радіус інерції;
z_0 – відстань від осі y до зовнішньої грані полиц;.

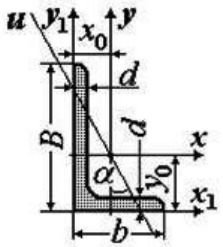
Номер профілю	Розміри, мм		Площа перерізу, A, см^2	I_x, см^4	i_x, см	$I_{x_0\,max}$, см^4	$i_{x_0\,max}$, см	$I_{y_0\,min}$, см^4	$i_{y_0\,min}$, см	I_{x_1}, см^4	z_0, см	Маса 1 м, кг.
	b	d										
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*
5	50	3	2,96	7,11	1,55	11,3	1,95	2,95	1,00	12,4	1,33	2,32
		4	3,98	9,21	1,54	14,6	1,94	3,80	0,99	16,6	1,38	3,05
		5	4,80	11,20	1,53	17,8	1,92	4,63	0,98	20,9	1,42	3,77
5,6	56	4	4,38	13,1	1,73	20,8	2,18	5,41	1,11	23,3	1,52	3,44
		5	5,41	16,0	1,72	25,4	2,16	6,59	1,10	29,2	1,57	4,25
6,3	63	4	4,96	18,9	1,95	29,9	2,45	7,81	1,25	33,1	1,69	3,90
		5	6,13	23,1	1,94	36,6	2,44	9,52	1,25	41,5	1,74	4,81
		6	7,28	27,1	1,93	42,9	2,43	11,20	1,24	50,0	1,78	5,72
6,5	65	6	7,52	29,85	1,99	47,38	2,51	12,32	1,28	17,53	1,83	5,91
		7	9,84	38,13	1,97	60,42	1,27	15,85	2,48	28,29	1,90	7,73
7	70	4,5	6,20	29,0	2,16	46,0	2,72	12,0	1,39	51,0	1,88	4,87
		5	6,86	31,9	2,16	50,7	2,72	13,2	1,39	56,7	1,90	5,38
		6	8,15	37,6	2,15	59,6	2,71	15,5	1,38	68,4	1,94	6,39
		7	9,42	43,0	2,14	68,2	2,69	17,8	1,37	80,1	1,99	7,39
		8	10,70	48,2	2,13	76,4	2,68	20,0	1,37	91,9	2,02	8,37

Продовження додатка 4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
7,5	75	5	7,39	39,5	2,31	62,6	2,91	16,4	1,49	69,6	2,02	5,8
		6	8,78	46,6	2,30	73,9	2,90	19,3	1,48	83,9	2,06	6,89
		7	10,1	53,3	2,29	84,6	2,89	22,1	1,48	98,3	2,10	7,96
		8	11,5	59,8	2,28	94,6	2,87	24,8	1,47	113	2,15	9,02
		9	12,8	66,1	2,27	105	2,86	27,5	1,46	127	2,18	10,10
8	80	5,5	8,63	52,7	2,47	83,6	3,11	21,8	1,59	93,2	2,17	6,78
		6	9,38	57,0	2,47	90,4	3,11	23,5	1,58	102	2,19	7,36
		7	10,8	65,3	2,45	104	3,09	27,0	1,58	119	2,23	8,51
		8	12,3	73,4	2,34	116	3,08	30,3	1,57	137	2,27	9,65
9	90	6	10,6	82,1	2,78	130	3,50	34,0	1,79	145	2,43	8,33
		7	12,3	94,3	2,77	150	3,49	38,9	1,78	169	2,47	9,64
		8	13,9	106	2,76	168	3,48	43,8	1,77	194	2,51	10,9
		9	15,6	118	2,75	186	3,96	48,6	1,77	219	2,55	12,2
10	100	6,5	12,8	122	3,09	193	3,88	50,7	1,99	214	2,68	10,1
		7	13,8	131	3,08	207	3,88	54,2	1,98	231	2,71	10,8
		8	15,6	147	3,07	233	3,87	60,9	1,98	265	2,75	12,2
		10	19,2	179	2,05	284	3,84	74,1	1,96	333	2,83	15,1
		12	22,8	209	3,03	331	3,81	86,9	1,95	402	2,91	17,9
		14	26,3	237	3,00	375	3,78	99,3	1,94	472	2,99	20,6
		16	29,7	264	2,98	416	3,74	112,0	1,94	542	3,06	23,3
11	110	7	15,7	176	3,40	279	4,29	72,7	2,19	308	2,96	11,9
		8	17,2	198	3,39	315	4,28	81,8	2,18	353	3,00	13,5
12,5	125	8	19,7	294	3,37	467	4,87	122	2,49	516	3,36	15,5
		9	22,0	327	3,86	520	4,86	135	2,48	582	3,40	17,3
		10	24,3	360	3,85	571	4,84	149	2,47	649	3,45	19,1
		12	28,9	422	3,82	670	4,82	174	2,46	782	3,53	22,7
		14	33,4	482	3,80	764	4,78	200	2,45	916	3,61	26,2
		16	37,8	539	3,78	853	4,75	224	2,44	1051	3,68	29,6

Продовження додатка 4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
14	140	9	24,7	466	4,34	739	5,47	192	2,79	818	3,78	19,4
		10	27,3	512	4,33	814	5,46	211	2,78	911	3,82	21,5
		12	32,5	602	4,31	957	5,43	248	2,76	1097	3,90	25,5
16	160	10	31,4	774	4,96	1229	6,25	319	3,19	1356	4,30	24,7
		11	34,4	844	4,95	1341	6,24	348	3,18	1494	4,35	27,0
		12	37,4	913	4,94	1450	6,23	376	3,17	1633	4,39	29,4
		14	43,3	1046	4,92	1662	6,20	431	3,16	1911	4,47	34,0
		16	49,1	1175	4,89	1866	6,17	485	3,14	2191	4,55	38,5
		18	54,8	1299	4,87	2061	6,13	537	3,13	2472	4,63	43,0
		20	60,4	1419	4,85	2248	6,10	589	3,12	2756	4,70	47,4
18	180	11	38,8	1216	5,60	1933	7,06	500	3,59	2128	4,85	30,5
		12	42,2	1317	5,59	2093	7,04	540	3,58	2324	4,89	33,1
20	200	12	47,1	1823	6,22	2896	7,84	749	3,99	3182	5,37	37,0
		13	50,9	1961	6,21	3116	7,83	805	3,98	3452	5,42	39,9
		14	54,6	2097	6,20	3333	7,81	861	3,97	3722	5,46	42,8
		16	62,0	2363	6,17	3755	7,78	970	3,96	4264	5,54	48,7
		20	76,5	2871	6,12	4560	7,72	1182	3,93	5355	5,70	60,1
		25	94,3	3466	6,06	5494	7,63	1438	3,91	6733	5,89	74,0
		30	111,5	4020	6,00	6351	7,55	1688	3,89	8130	6,07	87,6
22	220	14	60,4	2814	6,83	4470	8,60	1159	4,38	4941	5,93	47,4
		16	68,6	3175	6,81	5045	8,58	1306	4,36	5661	6,02	53,8
25	250	16	78,4	4717	7,76	7492	9,78	1942	4,98	8286	6,75	61,5
		18	87,7	5247	7,73	8337	9,75	2158	4,96	9342	6,83	68,9
		20	97,0	5765	7,71	9160	9,72	2370	4,94	10401	6,91	76,1
		22	106,1	6270	7,69	9961	9,69	2579	4,93	11464	7,00	83,3
		25	119,7	7006	7,65	11125	9,64	2887	4,91	13064	7,11	94,0
		28	133,1	7717	7,61	12244	9,59	3190	4,89	14674	7,23	104,5
		30	142,0	8177	7,59	12965	9,56	3389	4,89	14753	7,31	111,4



Позначення:
B – ширина більшої полиці;
b – ширина меншої полиці;
d – товщина полиці;
α – кут нахилу осі u;

Кутники нерівнобокі (ГОСТ 8510–86)

I – момент інерції;
i – радіус інерції;
x_0, y_0 – відстань від центра ваги до зовнішніх граней полиць.

Номер проф.	Розміри, мм			Площа перерізу A, см^2	I_x, см^4	i_x, см	I_y, см^4	i_y, см	$I_{u\,min}$, см^4	$i_{u\,min}$, см	$\mathrm{tg}\,\alpha$	I_{x_1}, см^4	I_{y_1}, см^4	x_0, см	y_0, см	Маса 1 м, кг.
	B	b	d													
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*	*15*	*16*	*17*
5,6/3,6	56	36	4	3,58	11,4	1,78	3,7	1,02	2,19	0,78	0,406	23,2	6,25	0,84	1,82	2,81
			5	4,41	13,8	1,77	4,48	1,01	2,66	0,78	0,404	29,2	7,91	0,88	1,86	3,46
6,3/4	63	40	4	4,04	16,3	2,01	5,16	1,13	3,07	0,87	0,397	33,0	8,51	0,91	2,03	3,17
			5	4,98	19,9	2,00	6,26	1,12	3,72	0,86	0,396	41,4	10,8	0,95	2,08	3,91
			6	5,90	23,3	1,99	7,28	1,11	4,36	0,86	0,393	49,9	13,1	0,99	2,12	4,63
			8	7,68	29,6	1,96	9,15	1,09	5,58	0,85	0,386	66,9	17,9	1,07	2,20	6,03
7/4,5	70	45	5	5,59	27,8	2,23	9,05	1,27	5,34	0,98	0,406	56,7	15,2	1,05	2,28	4,39
7,5/5	75	50	5	6,11	34,8	2,39	12,5	1,43	7,24	1,09	0,436	69,7	20,8	1,17	2,39	4,79
			6	7,25	40,9	2,38	14,6	1,42	8,48	1,08	0,435	83,9	25,2	1,21	2,44	5,69
			8	9,47	52,4	2,35	18,5	1,40	10,9	1,07	0,430	112	34,2	1,29	2,52	7,43
8/5	80	50	5	6,36	41,6	2,56	12,7	1,41	7,58	1,09	0,387	84,6	20,8	1,13	2,60	4,99
			6	7,55	49,0	2,55	14,8	1,40	8,88	1,08	0,386	102	25,2	1,17	2,65	5,92
9/5,6	90	56	5,5	7,86	65,3	2,88	19,7	1,58	11,8	1,22	0,384	132	32,2	1,26	2,92	6,17
			6	8,54	70,6	2,88	21,2	1,58	12,7	1,22	0,384	145	35,2	1,28	2,95	6,70
			8	11,18	90,9	2,85	27,1	1,56	16,3	1,21	0,380	194	47,8	1,36	3,04	8,77

Продовження додатка 4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
10/6,3	100	63	6	9,59	98,3	3,2	30,6	1,79	18,2	1,38	0,393	198	49,9	1,42	3,23	7,53
			7	11,1	113	3,19	35,0	1,78	20,8	1,37	0,392	232	58,7	1,46	3,28	870
			8	12,6	127	3,18	39,2	1,77	23,4	1,36	0,391	266	67,6	1,50	3,32	9,87
			10	15,5	154	3,15	47,1	1,75	28,3	1,35	0,387	333	85,8	1,58	3,40	12,10
11/7	110	70	6,5	11,4	142	3,53	45,6	2,00	26,9	1,53	0,402	285	74,3	1,58	3,55	8,98
			8	13,9	172	3,51	54,6	1,98	32,3	1,52	0,400	353	92,3	1,64	3,61	10,90
12,5/8	125	80	7	14,1	227	4,01	73,7	2,29	43,4	1,76	0,407	452	119	1,80	4,01	11,0
			8	16,0	256	4,00	83,0	2,28	48,8	1,75	0,406	518	137	1,84	4,05	12,5
			10	19,7	312	3,98	100	2,27	59,3	1,74	0,404	649	173	1,92	4,14	15,5
			12	23,4	365	3,95	117	2,24	69,5	1,72	0,400	781	210	2,00	4,22	18,3
14/9	140	90	8	18,0	364	4,49	120	2,58	70,3	1,98	0,411	727	104	2,03	4,49	14,1
			10	22,2	444	4,47	146	2,56	85,5	1,96	0,409	911	245	2,12	4,58	17,5
16/10	160	100	9	22,9	606	5,15	186	2,85	110	2,20	0,391	1221	300	2,23	5,19	18,0
			10	25,3	667	5,13	204	2,84	121	2,19	0,390	1359	335	2,28	5,23	19,8
			12	30,0	784	5,11	239	2,82	142	2,18	0,388	1634	405	2,36	5,32	23,6
			14	34,7	897	5,08	272	2,80	162	2,16	0,385	1910	477	2,43	5,40	27,3
18/11	180	110	10	28,3	952	5,80	276	3,12	165	2,42	0,375	1933	444	2,44	5,88	22,2
			12	33,7	1123	5,77	324	3,10	194	2,40	0,374	2324	537	2,52	5,97	26,4
20/12,5	200	125	12	37,9	1568	6,43	482	3,57	285	2,74	0,392	3189	786	2,83	6,54	29,7
			14	43,9	1801	6,41	551	3,59	327	2,73	0,390	3726	922	2,91	6,62	34,4
			16	49,8	2026	6,38	617	3,52	367	2,72	0,388	4264	1061	2,99	6,71	39,1
25/16	250	160	12	48,3	3147	8,07	1032	4,62	604	3,54	0,410	6212	1634	3,53	7,97	37,9
			16	63,6	4091	8,02	1333	4,58	781	3,50	0,408	8308	2200	3,69	8,14	49,9
			18	71,1	4545	7,99	1475	4,56	896	3,49	0,407	9358	2487	3,77	8,23	55,8

Список літератури

1. Писаренко Г. С. Опір матеріалів / Г. С. Писаренко, О. Л. Квітка, Е. С. Уманський. – К. : Вища школа, 2004. – 655 с.

2. Феодосьев В. И. Сопротивление материалов / В. И. Феодосьев. – М. : Наука, 1986. – 512 с.

3. Конохов В. І. Розрахунки на міцність стержнів при центральному розтяганні – стисканні: навч. -метод. посіб. / В. І. Конохов, В. І. Лавінський, В. Л. Хавін. – Х. : НТУ "ХПІ", 2007. – 76 с.

4. Конкін В. М. Розрахунки бруса при прямому згинанні: навч. -метод. посіб. / В. М. Конкін, Б. М. Киркач, С. Ю. Погорілов, Н. В. Кравцова. – Х. : НТУ "ХПІ", 2009. – 80 с.

5. Конохов В. І. Розрахунки стержнів при крученні: навч. -метод. посіб. / В. І. Конохов , В. Л. Хавін, Л. В. Автономова. – Х. : НТУ "ХПІ", 2012. – 76 с.

Зміст

Для нотатків

Навчальне видання

КОНКІН Валерій Миколайович
КОНОХОВ Володимир Іванович
ШЕРГИН Сергій Юрійович
КРАВЦОВА Наталія Вікторівна

РОЗРАХУНКИ БРУСА ПРИ ПРОСТИХ ВИДАХ ДЕФОРМУВАННЯ

Навчально-методичний посібник з курсу „Опір матеріалів”
для студентів машинобудівних спеціальностей
заочної форми навчання

Відповідальний за випуск В.Л. Хавін
Роботу до видання рекомендував С.К. Шелковий

В авторській редакції

План 2011 , поз. 7/18-12
Підп. до друку . .12. Формат 60х84 1/16. Папір офісний.
Riso-друк. Гарнітура Таймс. Ум. друк. арк. 3,5.
Наклад 300 прим. Зам. № . Ціна договірна.

Видавничий центр НТУ “ХПІ”, 61002, Харків, вул. Фрунзе, 21

Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 3657 від 24.12.2009 р.

Друкарня НТУ “ХПІ”, 61002, Харків, вул. Фрунзе, 21